МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

**РЕФЕРАТ**

по курсу: «Математические методы в управлении»

на тему: **«Модель Леонтьева многоотраслевой экономики»**

|  |  |
| --- | --- |
| студента (ки) | Швец Д.Д. |
| Институт экономики и управления |
| Направление 38.03.02 «Менеджмент»Группа 61-М |
| Работу проверил (ла)к.э.н., доцент |  | М.И. Батранина |

Орел 2017

СОДЕРЖАНИЕ

[Введение 3](#_Toc479356866)

[1. Возникновение и развитие межотраслевой модели. 5](#_Toc479356867)

[2. Математическое представление модели Леонтьева. 8](#_Toc479356868)

[2.1. Балансовые соотношения. 8](#_Toc479356869)

[2.2. Линейная модель многоотраслевой экономики. 9](#_Toc479356870)

[2.3. Продуктивные модели Леонтьева. 11](#_Toc479356871)

[3. Примеры применения модели Леонтьева. 13](#_Toc479356872)

[Заключение 17](#_Toc479356873)

[Список использованной литературы 18](#_Toc479356874)

# **Введение**

В современном мире созданы и развиты различные теории и методы регулирования мировой экономики. Востребованность таких исследований особенно возросла после великой депрессии (1929-1933 г.г.) и второй мировой войны. Увеличилась необходимость в планировании и прогнозировании. Объясняется это, прежде всего тем, что современная экономика представляет собой открытую систему, построенную на прямых и обратных горизонтальных и вертикальных связях, и может успешно развиваться только при наличии эффективного управления этими связями, как на макро -, так и на микроуровне. Поэтому проблема создания рациональной и высокоэффективной межотраслевой экономики чрезвычайно важна.

Важным инструментом прогнозирования является разработанный В. Леонтьевым межотраслевой равновесный баланс, позволяющий анализировать экономику, как национальную, так и отдельных регионов и на основе этого вырабатывать адекватные меры.

Действительно, реальное равновесие на рынке возможно лишь при совпадении ожиданий производителей и потребителей, так как на практике равновесие достигается достаточно редко, поскольку в реальной жизни неизбежны экономические кризисы, неполное или неэффективное использование ресурсов.

В данной работе рассматривается модель межотраслевой экономики. Актуальность рассматриваемой темы состоит в том, что мир не стоит на месте, появляются новые отрасли экономики, которые требуют четкого расчета, по взаимодействию их с давно зарекомендовавшими.

Цель данной работы - изучить основные понятия и методы составления межотраслевого баланса с помощью модели Леонтьева. Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

1) проследить историю создания и развития модели межотраслевого баланса;

2) рассмотреть математическое представление модели Леонтьева;

3) рассмотреть учебные примеры по решению задач с помощью модели Леонтьева.

# **1. Возникновение и развитие межотраслевой модели.**

Принцип взаимозависимости, без которого не существует ни одна экономика, имеет довольно длинную историю, которая началась еще до Вальраса и Парето. Его истоки можно обнаружить в учении французских физиократов XVIII в., один из которых, Франсуа Кенэ, в своей "Экономической таблице" пытался показать, как происходит движение товаров и денег между различными секторами экономики. Кенэ ставил перед собой задачу доказать преимущественное значение сельского хозяйства в экономике, как и то, что только сельскохозяйственный труд создает доход общества. Аналогичную схему разработал и Маркс, но определяющее значение у него имеет уже не сельское хозяйство, а промышленность. Это особенно отчетливо выражено в схемах воспроизводства, содержащихся во II томе "Капитала". Эти модели, однако, представляли собой довольно общую схему экономики. В схеме Маркса экономика состоит из двух подразделений: производство средств и производство предметов потребления.

Заслуга первого точного теоретического определения принципа взаимозависимости принадлежит Леону Вальрасу. В его модели содержатся функции полезности, функции предложения и спроса, а также коэффициенты производства, так что это давало возможность определить цены и количество товаров, поступающих на рынок. Но схема Вальраса носила чисто теоретический характер; он выражал сомнение в практической применимости ее, ибо вряд ли когда-либо будут доступны необходимые статистические данные. Парето и Бароне также не верили в то, что теорию равновесия можно наполнить реальным содержанием. В течение длительного времени экономисты ставили под вопрос "разрешимость" Вальрасовой системы, то есть существование единственного в своем роде и определенного равновесия. Лишь в 1930-х годах видный математик Абрахам Вальд доказал возможность такого решения. Однако его модель не гарантировала восстановления равновесия, если последнее нарушалось (в отличие от системы Вальраса). Как показал Вальд, в теории Вальраса содержалось в лучшем случае лишь одна линия равновесия. Построения Парето имели более богатое содержание, потому что он стремился использовать различные технические коэффициенты, а не одну однородную линейную производственную функцию. Хикс же, как и Самуэльсон, стремился к тому, чтобы система реагировала на изменения в параметрах. Еще одна трудность в теории Вальраса заключалась в том, что, поскольку имелись уравнения для каждого товара и фактора, даже для небольшой по масштабам "экономики` приходится решать тысячи уравнений. Вопрос агрегирования, то есть объединение нескольких элементов в единое целое, не приходил на ум Вальрасу, поэтому всякое практическое использование разработанной им системы было вне человеческих возможностей.

Первым шагом к практическому использованию теории общего равновесия была таблица «затраты - выпуск» Василия Леонтьева. Эта таблица впервые была опубликована в работе «Структура американской экономики» в 1919-1929 гг. Основные идеи, заложенные в методе «затраты - выпуск», были сформулированы Леонтьевым еще в студенческие годы, а в последующем развивались и доводились им до современного состояния.

Метод «затраты - выпуск» определенно отвечал критерию подлинно научной теории: он знаменовал собой программу эмпирических исследований, преследовавших цель наполнить теоретические построения реальным содержанием. По мере того как накапливались статистические данные и создавались теоретические построения, пригодные для числовой обработки, экономическая наука начала покидать сферу чистого мышления и все чаще соединяла теорию с фактами. С появлением метода «затраты - выпуск» возникло убеждение, что теория общего равновесия, выступавшая до сих пор в исключительно абстрактной форме, какую ей придал Вальрас, сможет быть наполнена практическим содержанием. Этому способствовало и появление быстродействующих электронно-вычислительных машин. Складывалось мнение, что экономисты в конце концов выйдут за пределы статистического изучения временных рядов и анализа по методу регрессии, с помощью которых исследовались лишь отдельные стороны экономической действительности. Хотя Парето и даже Викселль сомневались в возможности численного решения модели экономического равновесия, Вальд и Джон фон Нейман доказали необоснованность этих сомнений.

Дискуссия вокруг этого аспекта теории равновесия началась с замечания, сделанного в 1932 г. Гансом Нейссером; последний заявил, что требуется нечто большее, чем просто установить цены и показатели производства в неотрицательных величинах. Несколькими годами позже Карл Менгер отметил, что одна из функций экономической модели состоит в том, чтобы установить различие между свободными и редкими благами. Этой же проблеме уделял внимание и Вальд в статьях, относящихся к 1935 и 1936 гг. Нейман же в своей модели пошел дальше статической системы Вальда, ибо он ввел несколько вариантов производства, хотя и с фиксированными коэффициентами. И что важно, товары рассматривались одновременно и как затраты, и как продукты, а это подводило к понятию обращения товаров между отраслями экономики. В анализ входил и потребительский спрос, причем труд рассматривался как продукт домашнего хозяйства, а средства существования - как издержки этого "выпуска". Вся система была замкнутой, лишенной каких-либо излишков, необходимых для инвестирования. Вопрос заключался в том, может ли быть сохранено равновесие экономики, если последняя растет и расширяется? Нейман показал, что при условии пропорционального роста во всех секторах экономики, по крайней мере, в одном из них темп определяется нормой процента. Если же одна из отраслей растет быстрее, чем процентные платежи, то образуется неоплаченный излишек. Таким образом, в модели Неймана присутствует известный элемент динамики. Эти чрезвычайно абстрактные построения, перегруженные математическими расчетами, дали тем не менее толчок развитию не только метода «затраты - выпуск», но и линейного программирования.

Но самый ценный вклад в методику численного решения экономических моделей был сделан в 1940-х годах Леонтьевым, создавшим метод «затраты - выпуск». Отныне стало возможным численное решение больших систем уравнений. Современная электронно-вычислительная машина способна с феноменальной скоростью решить систему из тридцати уравнений с таким же числом неизвестных. Метод «затраты - выпуск» вполне себя оправдывает, по крайней мере в теоретическом плане. Как заметил Леонтьев, имеется определенная связь между, скажем, продажей автомобилей в Нью-Йорке и спросом на хлеб в Детройте. По сути дела, всю страну можно рассматривать как единую систему учета, где каждый сектор имеет собственный "бюджет" экономической активности.

# **2. Математическое представление модели Леонтьева.**

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой — потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

# **2.1. Балансовые соотношения.**

Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени; в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем следующие обозначения:

— $x\_{i}$ — общий объем продукции i-й отрасли (ее валовой выпуск);

—$x\_{ij}$ — объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции $x\_{j}$;

—$y\_{j }$— объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый продукт конечного потребления. К нему относятся личное потребление граждан, удовлетворение общественных потребностей, содержание государственных институтов и т.д.

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности, или простого сложения) балансовые соотношения имеют вид:

(1)



Уравнения (1) называются соотношениями баланса.

Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, будем в дальнейшем иметь в виду стоимостный баланс.

# **2.2. Линейная модель многоотраслевой экономики.**

В. В. Леонтьевым на основании анализа экономики США и период перед второй мировой войной был установлен важный факт: в течение длительного времени величины $a\_{ij}=\frac{x\_{ij}}{x\_{j }} $ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. Это явление становится понятным в свете того, что технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объем потребления j-й отраслью продукции i-й отрасли при производстве своей продукции объема xj есть технологическая константа.

В силу указанного факта можно сделать следующее допущение: для производства продукции j-й отрасли объема $x\_{j }$ нужно использовать продукцию i-й отрасли объема $a\_{ij}x\_{i}$, где $a\_{ij}$ — постоянное число. При таком допущении технология производства принимается линейной, а само это допущение называется гипотезой линейности. При этом числа $a\_{ij} $называются коэффициентами прямых затрат. Согласно гипотезе линейности, имеем:

(2)



Тогда уравнения (1) можно переписать в виде системы уравнений:



(3)

Введем в рассмотрение векторы-столбцы объемов произведенной продукции (вектор валового выпуска), объемов продукции конечного потребления (вектор конечного потребления) и матрицу коэффициентов прямых затрат:



(4)

Тогда система уравнений (3) в матричной форме имеет вид:

(5)



Обычно это соотношение называют уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с описанием матричного представления (4) это уравнение носит название модели Леонтьева.

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать в двух целях. В первом, наиболее простом случае, когда известен вектор валового выпуска , требуется рассчитать вектор конечного потребления .

Во втором случае уравнение межотраслевого баланса используется для целей планирования со следующей формулировкой задачи: для периода времени T (например, год) известен вектор конечного потребления  и требуется определить вектор  валового выпуска. Здесь необходимо решать систему линейных уравнений (5) с известной матрицей А и заданным вектором . В дальнейшем мы будем иметь дело именно с такой задачей.

Между тем система (5) имеет ряд особенностей, вытекающих из прикладного характера данной задачи; прежде всего все элементы матрицы А и векторов   и  должны быть неотрицательными.

# **2.3. Продуктивные модели Леонтьева.**

Матрица А, все элементы которой неотрицательны, называется продуктивной, если для любого вектора  с неотрицательными компонентами существует решение уравнения (5) — вектор , все элементы которого неотрицательны. В таком случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Для уравнения типа (5) разработана соответствующая математическая теория исследования решения и его особенностей. Укажем некоторые ее основные моменты. Приведем без доказательства важную теорему, позволяющую устанавливать продуктивность матрицы.

ТЕОРЕМА. Если для матрицы А с неотрицательными элементами и некоторого вектора  с неотрицательными компонентами уравнение (5) имеет решение  с неотрицательными компонентами, то матрица А продуктивна.

Иными словами, достаточно установить наличие положительного решения системы (5) хотя бы для одного положительного вектора , чтобы матрица А была продуктивной. Перепишем систему (5) с использованием единичной матрицы Е в виде:

(6)



Если существует обратная матрица (E - А)-1, то существует и единственное решение уравнения (6):

(7)



Матрица (Е — А)-1 называется матрицей полных затрат.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы А. Приведем два из них.

Первый критерий продуктивности. Матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда матрица (Е - А)-1 существует и ее элементы неотрицательны.

Второй критерий продуктивности. Матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы:



причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

# **3. Примеры применения модели Леонтьева.**

Пример 1. В таблице приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Отрасль | Потребление | Конечный продукт | Валовый выпуск, ден.ед. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | Станкостроение | 15 | 12 | 24 | 23 | 16 | 10 | 100 |
| 2 | Энергетика | 10 | 3 | 35 | 15 | 7 | 30 | 100 |
| 3 | Машиностроение | 10 | 5 | 10 | 10 | 10 | 5 | 50 |
| 4 | Автомобилестроение | 10 | 5 | 10 | 5 | 5 | 15 | 50 |
| 5 | Добыча и переработка углеводородов | 7 | 15 | 15 | 10 | 3 | 50 | 100 |

 Решение. В данной таблице приведены составляющие баланса в соответствии с соотношениями (1): $x\_{ij}$ — первые пять столбцов, $y\_{i}$ — шестой столбец, $x\_{i}$ — последний столбец (i,j = 1, 2, 3, 4, 5). Согласно формулам (2) и (3), имеем:



Все элементы матрицы А положительны, однако нетрудно видеть, что их сумма в третьем и четвертом столбцах больше единицы. Следовательно, условия второго критерия продуктивности не соблюдены и матрица А не является продуктивной. Экономическая причина этой непродуктивности заключается в том, что внутреннее потребление отраслей 3 и 4 слишком велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Пример 2. Таблица содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Таблица 2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Отрасль | Потребление | Конечный продукт | Валовый выпуск, ден.ед. |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Добыча и переработка углеводородов | 5 | 35 | 20 | 10 | 100 |
| 2 | Энергетика | 10 | 10 | 20 | 30 | 100 |
| 3 | Машиностроение | 20 | 10 | 10 | 5 | 50 |

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формулам (2) и (3), имеем:



Матрица А удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь вид:



(8)

Требуется найти новый вектор валового выпуска \*, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица А не изменяется. В таком случае компоненты $x\_{1}$, $x\_{2}$,$ x\_{3}$ неизвестного вектора \* находятся из системы уравнений, которая согласно (3) имеет в данном случае вид:



В матричной форме эта система выглядит следующим образом:



(9)

или

(10)



где матрица (Е — А) имеет вид:



Решение системы линейных уравнений (10) при заданном векторе правой части (8) (например, методом Гаусса) дает новый вектор \* как решение системы уравнений баланса (9):



Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2%, уровень энергетики — на 35,8% и выпуск продукции машиностроения — на 85% по сравнению с исходными величинами, указанными в таблице.

# **Заключение**

Как свидетельствует экономическая теория, в экономике зачастую действуют устойчивые закономерности, поэтому в этом случае возможно их строго формализованное математическое описание. Однако разработка математических моделей чрезвычайно трудоемка, но еще труднее создать достаточно адекватную математическую модель.

Математическая формализация замечательна тем, что она конструирует с заданной степенью точности идеальный экономический процесс и позволяет выявить его существенные свойства, которые в реальном объекте затемнены.

В частности, Аналитическая модель Леонтьева наполнила практическим содержанием теорию общего экономического равновесия, она способствовала усовершенствованию математического аппарата. Так динамическая метод ученого раскрыла несостоятельность статичной математической модели одного из основоположников неоклассической экономической школы Л Вальраса. Метод Леонтьева отличает ясность и простота, универсальность и глобальность, другими словами пригодность для экономики отдельных стран и регионов, для мирового хозяйства в целом.

# **Список использованной литературы**

1. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. /В.А.Колемаев.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. - 295 с.

2. Колемаев В.А. Математическая экономика. /В.А.Колемаев.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1998.-240 с.

3. Розен В.В. Математические модели принятия решения в экономике.В.В.Розен.- М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002. - 288 с.

4. Таха Х.А. Введение в исследования операций. М.:/А.Х.Таха.- Издат. дом «Вильямс», 2005. - 912 с.

5. Режим доступа: http://www.100velikih.com/view898.html

6. Высшая математика для экономистов /под ред. проф. Н.Ш.Кремера.- М: ЮНИТИ, 1997. - 423 с.

7. Камаев В.Д. Экономическая теория. / В.Д. Камаева. М.: Гуманит. изд центр ВЛАДОС, 2002. - 592 с.

8. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. /М.С.Красс.-М.: Инфра-М, 1999. - 464 с.

9. Солодовников А.С., Бабайцев, В.А., Браилов, А.В. Математика в экономике. / А.С.Солодовников. М.: «Финансы и статистика», 1999. -220 с.

10. Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении. /Е.В.Шишкин.- М.: Дело, 2000. - 440 с.