

*Научное издание*

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

**ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ**

Математика и информатика

*Материалы XXXIX Международного научного семинара  
Под редакцией К.Г. Мордковича, И.К. Беловой*

ISBN 978-5-3524-0234-1

Печатается в авторской редакции

Темплан 2021 г. Поз. 50.

Подписано в печать 23.03.21. Формат 60 × 84/16. Бумага писчая.  
Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.  
Тираж 500 экз. Усл. печ. л. 3,26. Уч.-изд. л. 2. Заказ 96.

Издательство

Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,  
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1

**ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ**

*Материалы XXXIX Международного научного семинара*

*Под редакцией*

*К.Г. Мордковича, И.К. Беловой*

Выпуск 3



УДК 519+517  
П 71

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Московского государственного университета

**Рецензенты:**

д-р физ.-мат. наук А. В. Степанов;  
д-р физ.-мат. наук М. А. Сокольников

**Редакционная коллегия:**

д-р физ.-мат. наук С. С. Литовский (отв. ред.); д-р физ.-  
мат. наук Б. Е. Кузнецов (зам. отв. ред.); д-р тех. наук  
Г. А. Опарин; канд. тех. наук А. А. Семенов; канд. физ.-  
мат. наук; канд. физ.-мат. наук В. М. Волкова (отв. секр.)

**Теория чисел и прикладные задачи информатики:** сб.  
науч. тр. / Под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. М. А. Соколь-  
никова. — Москва : Изд-во Московск. гос. ун-та, 2021. — 50 с. —  
(Математика и информатика, Вып. 3).

ISBN 978-5-3524-0234-1

Сборник содержит статьи по различным областям матема-  
тики и информационных технологий. Предназначен для науч-  
ных работников, преподавателей, аспирантов и студентов стар-  
ших курсов технических специальностей.

ISBN 978-5-3524-0234-1

УДК 519+517

# Указатель авторов

<b>А</b>	Антипенко О., 34	<b>М</b>	Марков А., 10 Маслов И., 49
<b>Д</b>	Драйчиков И., 15	<b>Р</b>	Рожкова М., 15
<b>И</b>	Ильин А., 39	<b>С</b>	Савельев С., 4
<b>К</b>	Кашкин Г., 20 Кирсанов М., 25 Кравченко М., 44	<b>Ф</b>	Филиппов А., 30
<b>Я</b>	Янович Ю., 49		

© ФГБОУ ВО «Московский  
государственный университет», 2021

# Предметный указатель

<b>В</b>	Бином Ньютона, 11
<b>В</b>	Величина
	постоянная, 5
	случайная, 4
	зависимая, 6
	независимая, 6
<b>Д</b>	Дисперсия, 8
<b>З</b>	Задача Дирихле, 31
<b>Л</b>	Локальная теорема
	Лапласа, 11
<b>М</b>	Математическое ожидание, 4
<b>П</b>	Проблема Гольдбаха, 15
	Прогрессия
	геометрическая, 6
<b>Р</b>	Распределение
	биномиальное, 10
	нормальное, 12
	стандартное, 12
	Пирсона, 13
<b>С</b>	Среднее квадратическое отклонение, 9
	Степень свободы, 13
<b>У</b>	Уравнения эллиптического типа, 30
<b>Ф</b>	Формула Бернулли, 11

# Содержание

<i>Савельев С.В.</i> Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин . . . . .	4
<i>Марков А.К.</i> Некоторые законы распределения . . . . .	10
<i>Рожкова М.В., Драйчиков И.А.</i> Проблема Гольдбаха: поиск наименьшего слагаемого . . . . .	15
<i>Кашкин Г.В.</i> Локальное распределение простых чисел . . . . .	20
<i>Курсанов М.Н.</i> Плоские фермы. Методы решений	25
<i>Филитов А.А.</i> Уравнения эллиптического типа . . . . .	30
<i>Антименко О.С.</i> Визуализация данных с помощью Python . . . . .	34
<i>Ильин А.А.</i> Разработка программно-аппаратного комплекса для изучения алгоритмов распознавания лиц . . . . .	39
<i>Кравченко М.А.</i> Обзор и анализ методов повышения разборчивости речи в акустоэлектрических каналах утечки информации . . . . .	44
<i>Маслов И.А., Янович Ю.А.</i> Применение блокчейна для контроля за оборотом пластиковых труб . . . . .	49

поставок в отраслях с производством продукции из сырья, обладающего стандартными потребительскими свойствами, такими как взаимозаменяемость, возможность хранения, транспортировки и разделения партий.

Группа «Полипластик» первой в России начала работу по внедрению в цикл производства своих труб системы маркировки на базе блокчейн-платформы. На каждом отрезке 12 или 13 метров нанесено четыре уникальных этикетки с QR-кодом. Отсканировав их, можно выявить, внесена ли эта продукция в единый реестр пластиковых труб и не подделка ли это.

### Список литературы

1. Casino F., Dasaklis T.K., Patsakis C. A systematic literature review of blockchain-based applications: Current status, classification and open issues // Telematics and Informatics. 2019. V. 36, N 3. P. 55–81.
2. Kuo T.T., Kim H.E., Ohno-Machado L. Blockchain distributed ledger technologies for biomedical and health care applications // Journal of the American Medical Informatics Association. 2017. V. 24, N 6. P. 1211–1220.
3. Korepanova D., Kruglik S., Madhwal Y., Myaldzin T., Prokhorov I., Shiyarov I., Vorobyov S., Yanovich Y. Blockchain-Based Solution to Prevent Postage Stamps Fraud // 2019 IEEE International Conference on Blockchain and Cryptocurrency (ICBC). 2019. P. 171–175.
4. Kruglik S., Nazirkhanova K., Yanovich Y. Challenges beyond blockchain: oracles and privacy preserving // 2019 XVI International Symposium Problems of Redundancy in Information and Control Systems. 2019. P. 155–158.

## • МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА •

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 519.21

### ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

С. В. Савельев<sup>1</sup>

Закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, выражающие наиболее характерные свойства (черты) закона распределения случайной величины.

Такие числа носят название числовых характеристик случайной величины.

#### Математическое ожидание

**Определение 1.** Случайной величиной называется числовая величина  $X$ , которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины  $X$  можно записать в виде числовой последовательности  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (конечной или бесконечной), то  $X$  называется дискретной; если же возможные значения  $X$  заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина  $X$  называется непрерывно распределённой на этом интервале [2].

<sup>1</sup>Савельев Сергей Викторович, младший научный сотрудник Сибирского федерального научного центра информационных технологий Российской академии наук. E-mail: sergey.savelyev1971@gmail.com

- Запись информации о задании на производство.
  - Запись информации о номенклатуре труб.
  - Запись информации о паспорте качества.
  - Изменение статуса сертификата. Поля: наименование номенклатуры и статус сертификата соответствия.
- Стадия конечного продукта.** Транзакции такого типа соответствуют жизненному циклу трубы. Существует восемь транзакций такого типа:
- Запись информации о трубе.
  - Сопоставление отгрузки и трубы.
  - Сопоставление приемки и трубы.
  - Запись информации об отгрузке.
  - Редактирование информации об отгрузке трубы.
  - Запись информации о приемке труб.
  - Редактирование информации о приемке труб.
  - Запись информации о погашении QR-кода.

### Заключение

В данной статье описана внутренняя архитектура системы управления цепочками поставок для рынка пластиковых труб на основе блокчейн-платформы Echosip, которая была запущена на производстве осенью 2019 года и проработала в пилотном режиме до конца февраля 2020 г. Проведена полученная статистика, показывающая, что система соответствует высоким требованиям прикладной области. Отметим, что рассмотренный в статье подход также может быть использован для управления цепочками

**Определение 2.** Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_n p_n. \quad (1)$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то  $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ , если этот ряд сходится абсолютно.

**Замечание 1.** Математическое ожидание называют иногда взвешенным средним, так как оно приблизительно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

**Замечание 2.** Математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. В дальнейшем увидим, что это справедливо и для непрерывных случайных величин [4].

**Пример 1.** Определим математическое ожидание случайной величины  $X$  – числа бросков монеты до первого появления герба. Эта величина может принимать бесконечное число значений (множество возможных значений есть множество натуральных чисел). Ряд ее распределения имеет вид:

$X$	1	2	...	$n$	...
$p$	0.5	0.5 <sup>2</sup>	...	0.5 <sup><math>n</math></sup>	...

$$\begin{aligned} \text{Тогда } MX &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \dots = \\ &= 1 \cdot (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots) = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

При вычислении дважды использовалась формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_i}{1 - q}, \text{ откуда } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2.$$

### Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:  $M(C) = C$ .

*Доказательство.* Если рассматривать  $C$  как дискретную случайную величину, принимающую только одно значение  $C$  с вероятностью  $p = 1$ , то  $M(C) = C \cdot 1 = C$ .

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:  $M(CX) = C \cdot M(X)$ .

*Доказательство.* Если случайная величина  $X$  задана рядом распределения

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

то ряд распределения для  $CX$  имеет вид:

$Cx_i$	$Cx_1$	$Cx_2$	...	$Cx_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } M(CX) &= Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n = \\ &= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = CM(X) \end{aligned}$$

**Определение 3.** Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины называются зависимыми.

менную историю и контроль за использованием сырья, каждый его сертифицированный производитель сохраняет в блокчейне информацию о каждой партии сырья. После изготовления труб количество пластика соответствующего типа списывается со счета предприятия и присваивается трубе. Это списание фиксируется в блокчейн и соответствует уникальному идентификатору трубы, который записан в QR-коде. Чтобы гарантировать достоверность информации на всех этапах жизненного цикла труб с QR-меткой, для каждой из них мы отслеживали временные метки и геотеги, которые записываются в блокчейн при сканировании метки специализированным мобильным приложением.

### Транзакции

Весь набор системных транзакций можно сгруппировать в четыре класса в соответствии с выполняемыми действиями: администрирование пользователей, стадия сырья, стадия производства и конечный продукт.

**Администрирование пользователей.** Транзакции этого типа используются для управления пользователями и организациями в системе.

Существует четыре транзакции такого типа, что соответствует бизнес-логике системы: добавление новой организации, добавление нового пользователя, изменение статуса организации, изменение статуса пользователя.

**Стадия сырья.** Транзакции данного типа соответствуют внутренним бизнеспроцессам производителя сырья. Существует три транзакции этого типа для записи информации:

- Приходный ордер.
- Тип сырья.
- Партия сырья.

**Стадия производства.** Транзакции такого типа соответствуют процессу производства труб. Существует четыре транзакции такого типа:

В данной работе рассматривается применение блокчейна для решения задач управления цепочками поставок в рамках существующего рабочего процесса рынка пластиковых труб в России.

### Бизнес-логика блокчейн-решения

Для обеспечения необходимого уровня доверия со стороны всех участников рынка, а также борьбы с контрафактом и фальсификатом предлагаемое решение должно быть устойчивым к вводу несогласованной информации или изменению существующей в настоящее время информации постфактум, а также обеспечивать необходимый уровень синхронизации и управления правами доступа. Последнее требование заключается в том, что решение должно быть способно синхронизироваться с существующими в настоящее время системами учета производителей труб. Централизованные решения не отвечают всем требованиям одновременно, и современный подход к их решению – это системы на основе технологии блокчейн. Для поддержания высокой производительности, а также для обеспечения конфиденциальности пользовательских данных мы используем Eхonum – блокчейн-платформу для построения приватных блокчейнов с открытым исходным кодом.

Недобросовестные производители могут отправлять неверные данные в существующие в настоящее время системы отчетности или вести двойную бухгалтерию. Чтобы исключить такую возможность, предлагается хранить в блокчейн-базе данных информацию о сырье и каждой трубе, изготовленной производителем. После изготовления каждая труба маркируется QR-кодом, содержащим всю информацию о ней, и с баланса производителя списываем пошедшее на ее производство количество пластика. После каждой установки трубы гасится ее QR-код.

### Техническое описание системы на основе технологии блокчейн

Для реализации системы была выбрана платформа с открытым исходным кодом – Eхonum [4]. Чтобы гарантировать неиз-

**Определение 4.** Назовем произведением независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  случайную величину  $XY$ , возможные значения которой равны произведению всех возможных значений  $X$  на все возможные значения  $Y$ , а соответствующие им вероятности равны произведением вероятностей множителей [4].

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:  $M(XY) = M(X)M(Y)$ .

*Доказательство.* Для упрощения вычислений ограничимся случаем, когда  $X$  и  $Y$  принимают только по два возможных значения:

$x_i$	$x_1$	$x_2$
$p_i$	$p_1$	$p_2$

$y_i$	$y_1$	$y_2$
$g_i$	$g_1$	$g_2$

Тогда ряд распределения для  $XY$  выглядит так:

$XY$	$x_1y_1$	$x_2y_1$	$x_1y_2$	$x_2y_2$
$p$	$p_1g_1$	$p_2g_1$	$p_1g_2$	$p_2g_2$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } M(XY) &= x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + x_1y_2 \cdot \\ &\cdot p_1g_2 + x_2y_2 \cdot p_2g_2 = (y_1g_1 + y_2g_2)(x_1p_1 + x_2p_2) = \\ &= M(X) \cdot M(Y). \end{aligned}$$

**Замечание 3.** Аналогично можно доказать это свойство для большего количества возможных значений множителей.

**Замечание 4.** Свойство 3 справедливо для произведения любого числа независимых случайных величин, что доказывается методом математической индукции.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ .

## Дисперсия

**Определение 5.** Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (2)$$

**Замечание 5.** В определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего, а его квадрат. Это сделано для того, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.

**Замечание 6.** Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

**Замечание 7.** Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии, справедливость которой доказывается в следующей теореме:

**Теорема 1.** Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) \quad (3)$$

**Доказательство.** Используя то, что  $M(X)$  - постоянная величина, и свойства математического ожидания, преобразуем формулу 2 к виду:

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) = \\ &= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + \\ &+ M^2(X) = M(X^2) - M^2(X), \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

## Свойства дисперсии

- 1) Дисперсия постоянной величины  $C$  равна нулю:  $D(C) = 0$ .
- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:  $D(CX) = C^2D(X)$ .

## • МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА •

### ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 004.056

### ПРИМЕНЕНИЕ БЛОКЧЕЙНА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗА ОБОРОТОМ ПЛАСТИКОВЫХ ТРУБ

И. А. Маслов<sup>1</sup>, Ю. А. Янович<sup>2</sup>

В работе представлена архитектура системы по контролю за оборотом пластиковых труб на основе блокчейна. Приведена бизнес-логика используемого решения, а также его описание и результаты пилотного внедрения.

## Введение

Блокчейн — это децентрализованная база данных со встроенными инструментами аудита, в которой все действия с данными отображаются в защищенном от несанкционированного доступа журнале. Корректность процессов внутри блокчейна гарантируется с помощью криптографических методов, таких как хэш-функции и цифровые подписи. С момента выхода первой блокчейн-сети Bitcoin [1], блокчейн де-факто стал стандартом во многих промышленных приложениях, например, в интернете вещей, автомобильных коммуникациях нового поколения, умных сетях электроснабжения, электронном здравоохранении, государственных реестрах, управлении цепочками поставок [2, 3].

<sup>1</sup>Маслов Иван Алексеевич, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет).  
E-mail: maslov.mfti@mail.ru

<sup>2</sup>Янович Юрий Андреевич, Сколковский институт науки и технологий  
E-mail: ran1978@gmail.com



- Бруевич, С.Б. Козлачков, С.С. Никулин // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2014. – № 2. – С. 26–32.
4. Саложков М.А. Электроакустика. – М.: Связь, 1978. – 282 с.
5. Трушин В.А., Иванов А.В., Рева И.Л. О корректировке методики оценки защищенности речевой информации от утечки по техническим каналам // Специальная техника. – 2016. – № 6. – С. 22–30.

- 3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ .

Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

**Определение 6.** *Средним квадратическим отклонением  $\sigma$  случайной величины  $X$  называется квадратный корень из дисперсии:*

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (4)$$

Среднее квадратическое отклонение является мерой надежности средней. Чем меньше среднее квадратическое отклонение, тем лучше средняя арифметическая отражает собой всю представляемую совокупность [1].

### Список литературы

1. Аноприенко А.А. Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин. Их свойства и примеры / под ред. О. Васильев. – 7-е издание, испр. и доп. – ДонНТУ, 2002. – С. 22–25
2. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. М. Савельев. – 3-е издание, перераб. и доп. – МГУ, 1983. – 329 с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Мхитарян, Л. Трошин, Е. Адамова [и др.] // М.: Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права, 2003. – 130 с. – 2012. – 3–1 (15). – С. 22–31.
4. Улитин В.А. Элементы теории вероятности в примерах и задачах / В.А. Улитин, А.П. Старостин // Теория и системы управления. – 2009. – № 4. – С. 195–198.

горитмическая скрытность, которую можно реализовать с помощью преобразования сигнала по определенным алгоритмам, либо маскирование сигнала другими сигналами.

**Шаг 3.** Измерение параметров сигнала.

**Шаг 4.** Распознавание сигнала при сопоставлении с образцовым эталоном. Данные этапы обладают критерием информативной скрытности [4]. Ее можно обеспечить применением криптографических методов шифрования сообщений.

### Заключение

Применение методов шумоочистки позволяет потенциальному злоумышленнику повысить ранг перехваченной информации. Действующие методики не могут обеспечить достаточную защищенность речевой информации. Необходимо разрабатывать новые методики с учетом возможности нарушителя использовать средства отложенного анализа записанного речевого сигнала, которые повышают показатели разборчивости речи.

### Список литературы

1. Дворянкин С.В., Бонч-Бруевич А.М., Козлачков С.Б. Обработка речевых и звуковых сигналов и изображений в пакетах специального программного обеспечения: методические указания к выполнению научно-исследовательских работ по дисциплине «Специальные информационные технологии». – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 52 с.
2. Козлачков С.Б., Дворянкин С.В., Бонч-Бруевич А.М. Проблемы и перспективы защиты акустической речевой информации // Специальная техника. – 2016. – № 6. – С. 15-21.
3. Особенности выделения речевой информации при ее зашумлении с целью защиты / С.В. Скрыль, А.М. Бонч-

## ● МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА ●

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 517.11

### НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. К. Марков<sup>1</sup>

Закон распределения случайной величины является ее исчерпывающей вероятностной характеристикой и может быть представлен в таких формах, как функция вероятности, функция распределения и плотность вероятности. В этой статье описаны лишь некоторые законы распределения, описаны их характеристики и способы применения.

#### Биномиальный закон распределения

Биноминальное распределение представляет собой распределение вероятностей возможных чисел появления события  $A$  при  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых событие  $A$  может осуществиться с одной и той же вероятностью  $P(A) = p = const$ . Кроме события  $A$  может произойти противоположное событие  $\bar{A}$ , вероятность которого  $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ . Вероятности любого числа событий соответствуют членам разложения бинома Ньютона в степени, равной числу испытаний:

$$(p + q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2}q^2 + \dots + \\ + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + npq^{n-1} + q^n \quad (1)$$

<sup>1</sup>Марков Алексей Константинович, доктор технических наук, профессор кафедры безопасности и управления в телекоммуникациях Донецкого национального технического университета. E-mail: dntu.alex.marikov@gmail.com

линейности передаточной функции речевого тракта в модели речевого сигнала. Точность вычисления коэффициентов линейного предсказания с дальнейшей реконструкцией информационного сигнала понижается, если обрабатывать сигнал с высоким уровнем шума. Так как человек производит разные звуки, то передаточной функции линейной системы свойственно меняться во времени.

### Модели акустоэлектрического канала утки информации

При построении модели акустоэлектрического канала утки информации с учетом модели поведения потенциального нарушителя, которая определяет его потенциальные возможности, необходимо рассмотреть критерии оценки защищенности речевой информации, при которых нарушитель не сможет восстановить защищаемую речевую информацию, если она искажена шумом. Можно предположить, что злоумышленник имеет в полном распоряжении средства, которые могут улучшить качество исходного речевого сигнала. Объективность критериев может быть обеспечена при условии, если они учитывают возможности средств, позволяющих проводить обработку речи в режиме отложенного анализа записанного речевого сигнала. Также нарушитель имеет возможность использовать различные методы шумоочистки для повышения разборчивости речи при сохранении характеристик и свойств речевого сигнала. Для каждого из основных шагов шумоочистки сигналов можно выделить соответствующие критерии оценки защищенности речевой информации.

**Шаг 1.** Обнаружение смеси сигнала и шума. Здесь можно применить критерий энергетической скрытности, который осуществляется путем энергетического маскирования сигнала. Восстановить речевой сигнал можно, если реконструировать структуру по остаточным следам.

**Шаг 2.** Фильтрация и попытки различить сигнал в смеси с другими сигналами. В данном случае критерием выступает ал-

где  $p$  — вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит  $n$  раз;  $q^n$  — вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  не наступит ни разу;  $c_n^m p^m q^{n-m}$  — вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит  $m$  раз, а событие  $\bar{A}$  наступит  $n - m$  раз;  $c_n^m$  — число сочетаний (комбинаций) появления события  $A$  и  $\bar{A}$  [1].

Вероятность осуществления события  $A$   $m$  раз при  $n$  независимых испытаниях с одинаковой вероятностью  $p$  можно рассчитать по формуле общего члена разложения бинома Ньютона:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (2)$$

Эта формула называется формулой Бернулли. Ее целесообразно использовать при небольшом числе испытаний, порядка  $n \leq 8$ . Сумма вероятностей всех комбинаций равна единице,

$$\sum_{i=0}^n P_{m,n} = 1 \quad (3)$$

как сумма вероятностей единственно возможных и несовместных событий (комбинаций), составляющих полную группу событий. Ряд распределения вероятностей случайной величины  $X = m$  записывают следующим образом:

$$X = \left\{ \begin{matrix} m \\ c_n^m p^m (1-p)^{n-m} \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

### Числовые характеристики биномиального распределения

$M(m) = np$  — математическое ожидание частоты появлений события  $A$  при  $n$  независимых испытаниях;

$D(m) = npq$  — дисперсия частоты появления события  $A$ ;

$\sigma(m) = \sqrt{npq}$  — среднее квадратическое отклонение частоты.

Когда число испытаний  $n$  велико, то для вычисления вероятности комбинаций используется локальная теорема Лапласа:

$$P_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(t), \quad (5)$$

где  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  — нормированная плотность нормального распределения;  $t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$  — нормированное значение частоты.

### Нормальный закон распределения

Нормальное распределение — распределение вероятностей, которое в одномерном случае задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6)$$

где  $\mu$  — среднее значение, медиана и мода распределения, а параметр  $\sigma$  — среднеквадратическое отклонение [2].

Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu = 0$  и стандартным отклонением  $\sigma = 1$ .

Его плотность вероятности равна:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (7)$$

Функция распределения стандартного нормального распределения обычно обозначается заглавной греческой буквой  $\Phi$  и представляется собой интеграл:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (8)$$

Кривая нормального распределения вероятностей имеет вид как показано на рис. 1. С уменьшением  $\sigma$  график становится всё

### Методы повышения разборчивости речи

Относительно акустоэлектрических каналов утечки информации применимы следующие способы восстановления разборчивости речевых сообщений [1].

- 1) **Фильтрация шумоподобных и речеподобных помех.** В основном используется для защиты от активных искажений, при наличии помех в полезном аудиосигнале. Недостатком является то, что не только подавляются помехи, но и снижается уровень информативного сигнала. Адаптивные фильтры предназначены для компенсации в речевом сигнале достаточно узкополосных помех. Данные помехи могут возникнуть из-за трансформаторных шумов, шумов механизмов, наводки от сети электропитания. Медианный фильтр представляет собой оконный фильтр, последовательно скользящий по массиву сигнала.
- 2) **Компенсация искажений, которые возникают в процессе записи сообщений.** Зная тип помехи, можно добиться сохранения большей части информации о спектре информативного сигнала. Данный метод может быть осуществлен на основе вычитания спектра. Но он является достаточно эффективным, только если возможно достаточно точно оценить спектральный состав помехи, т. е. если помеха является стационарной. Но даже в таком случае вследствие вычитания спектра в полосе частот, занимаемой помехой, наблюдается искажение сигнала. Компенсация искажений не позволяет подавлять импульсные помехи. Несмотря на все минусы, данный метод широко распространён в задачах оценки защищённости речевого сигнала.
- 3) **Реконструкция речевого сообщения за счет оценки параметров образования речи.** Если в качестве модели речевого сигнала можно использовать линейную систему, то в данном случае может быть применена модель линейного предсказания речи. В таком случае можно предполагать о

более островеишим. Изменение  $a$  при постоянном  $\sigma$  вызывает лишь смещение графика по оси абсцисс.

• МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА •

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 621.317

**ОБЗОР И АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ  
РАЗБОРЧИВОСТИ РЕЧИ В  
АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КАНАЛАХ УТЕЧКИ  
ИНФОРМАЦИИ**

*М. А. Кравченко<sup>1</sup>*

В работе рассмотрены основные проблемы в области защиты речевой информации от утечек по акустоэлектрическому каналу. Описаны основные методы шумоподавления и реконструкции сигналов, которые применяются для повышения качества речевых сигналов, искаженных помехами и шумом.

**Постановка задачи**

Важные факторы, которые могут повлиять на точность и достоверность оценок защищенности речевой информации: определение возможностей соответствующей модели нарушителя [1]; оценка характера и степени влияния искажений на словесную разборчивость; проблема выбора адекватных тестовых сигналов, предназначенных для определения характеристик и измерений значимых параметров опасных сигналов; метрологические аспекты при выполнении измерительных процедур [5].

В акустоэлектрическом канале одноканальные асинхронные системы шумоподавления, будь то адаптивные, медианные или узкополосные фильтры, а также методы спектрального вычитания, более эффективны, чем многоканальные системы [2, 3].

<sup>1</sup>Кравченко Михаил Алексеевич, старший преподаватель кафедры вычислительной техники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. E-mail: kravch.spbstu@yandex.ru

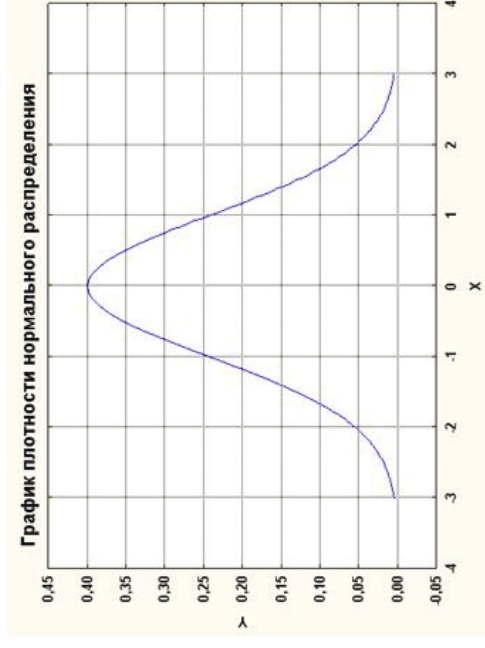


Рис. 1. График плотности нормального распределения

**Распределение Пирсона**

До конца XIX века нормальное распределение считалась всеобщим законом вариации данных. Однако К. Пирсон заметил, что эмпирические частоты могут сильно отличаться от нормального распределения. Встал вопрос, как это доказать. Требования не только графическое сопоставление, которое имеет субъективный характер, но и строгое количественное обоснование.

Так был изобретен критерий  $\chi^2$ , который проверяет значимость расхождения эмпирических (наблюдаемых) и теоретических (ожидаемых) частот. Фишер ввел в статистику новое понятие – степень свободы (degrees of freedom), которое представляет собой количество независимых слагаемых в сумме [4].

Чтобы получить интересующую вероятность, можно воспользоваться соответствующей статистической таблицей 1 для различных степеней свободы  $f$  и доверительной вероятности  $p$ .

$f$	$\chi^2$		$f$	$\chi^2$	
	$P = 0,99$	$P = 0,95$		$P = 0,99$	$P = 0,95$
1	6,64	3,84	9	21,7	16,9
2	9,21	5,99	10	23,2	18,3
3	11,3	7,81	11	24,7	19,7
4	13,3	9,49	12	26,2	21,0
5	15,1	11,1	13	27,7	22,4
6	16,8	12,6	14	29,1	23,7
7	18,5	14,1	15	30,6	25,0
8	20,1	15,5	16	32,0	26,3

Таблица 1: Значения критерия Пирсона

Критерий необходим для решения широкого круга задач, например для анализа категориальных данных, которые выражаются принадлежностью к какой-то категории [3].

### Список литературы

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / под ред. Н. Кремер. – 8-е издание, испр. и доп. – МГУ, 2007. – 288 с.
2. Максимов Ю.Д. Вероятностные разделы математики : Учебное пособие. / Д.П. Артемьев, И.К. Голубев. – Часть 1. – т. 3. – СПбГУ, 2002. – 96 с.
3. Критерий согласия Пирсона 2 (Хи-квадрат). – 2020. – URL: <https://statanaliz.info/statistica/proverka-gipotez/kriterij-soglasiya-pirsona-khi-kvadrat/> (дата обр. 06.03.2021)
4. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Мхитарян, Л. Трошин, Е. Адамова [и др.] // М.: Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права, 2003. – 130 с. – 2012. – 3–1 (15). – С. 38–43.

исходного изображения. К таким настройкам относятся:

- Hue — цветовой тон, т. е. оттенок цвета;
- Saturation — насыщенность. Чем выше этот параметр, тем «чище» будет цвет, а чем ниже, тем ближе он будет к серому;
- Value (Brightness) — значение (яркость) цвета. Чем выше значение, тем ярче будет цвет (но не белее), а чем ниже, тем темнее (0% — черный).

### Список литературы

1. Тагаренков Д.А. Анализ методов обнаружения лиц на изображении // Молодой ученый. – 2015. – № 4 (84). – С. 270–276.
2. Тихонова Т.С., Белов Ю.С. Основные подходы к отслеживанию и распознаванию лица // Электронный журнал: наука, техника и образование. – 2016. – № 2 (6). – С. 111–115.
3. Разинкин В.Б., Калермина Т.С. Распознавание лица по фотографии // Международный журнал перспективных исследований. – 2018. – Т. 8, № 1-2. – С. 171–180.
4. Анализ существующих подходов к распознаванию лиц [Электронный ресурс]. – URL: <https://habr.com/ru/blog/238129/> (дата обращения: 27.03.2021).

горитм распознавания лиц; блок настройки параметров обнаружения лица; блок настройки параметров выбранного алгоритма распознавания лиц.

В блоке настройки параметров обнаружения лица параметр Min Size – минимальная искомая область. Области меньшего размера будут игнорироваться. С увеличением параметра увеличивается скорость работы метода. Параметр Min Neighbors влияет на качество обнаруженного лица: чем выше параметр, тем лучше качество. Scale Factor – шаг, который показывает, во сколько раз область искомого лица будет увеличиваться [1].

При изменении алгоритма распознавания лиц поле автоматически перестраивается под параметры выбранного алгоритма. Окно распознавания лиц позволяет менять настройки исходного изображения (рис. 2).



Рис. 2. Интерфейс настройки параметров изображения

Данное окно отображает кадрowo изображения, захваченные с видео-потока камеры, и позволяет изменять настройки

УДК 519.11

## ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА: ПОИСК НАИМЕНЬШЕГО СЛАГАЕМОГО

М. В. Рожкова<sup>1</sup>, И.А. Драйчиков<sup>2</sup>

В статье приводятся результаты вычислительного эксперимента по поиску наименьшего слагаемого в разложении четного числа в сумму двух простых чисел.

**Определение 1.** *Натуральное число называется простым, если оно делится только на себя и на 1.*

Поиск формулы простого числа, возможно, одна из сложнейших математических проблем человечества.

**Проблема Гольдбаха (проблема Эйлера, бинарная проблема Гольдбаха):** утверждение о том, что любое чётное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Проблема Гольдбаха включена под номером 8 в список проблем Гильберта (1900 г.) и является почти единственной из проблем Гильберта, до сих пор остающихся нерешённой.

<sup>1</sup>Рожкова Марина Владимировна, соискатель кафедры теоретической и прикладной информатики Краснодарского колледжа управления, техники и технологий. E-mail: seamise.at@mail.ru

<sup>2</sup>Драйчиков Иван Андреевич, аспирант кафедры инженерной математики Краснодарского колледжа управления, техники и технологий. E-mail: ktib68@gmail.com

В 1742 г. Кристиан Гольдбах (первый российский криптограф) послал письмо Леонарду Эйлеру, в котором высказал предположение: Каждое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел. Леонард Эйлер заинтересовался проблемой и выдвинул более сильную гипотезу: Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел.



Рис. 1. К. Гольдбах (1690 - 1764)

Таким образом, это одна из старейших математических проблем, которая была поставлена еще во времена царствования Елизаветы Петровны. Проблема удивительно проста в смысле формулировке и легко поддается вычислительным экспериментам. Результаты некоторых из этих экспериментов приведены в данной статье.

В процессе вычислений были использованы идеи и методология, изложенная в работах [1,2]. Вычисления производились с использованием пакета компьютерной алгебры *gar 4.9.X*. Графики строились с использованием программы *SciDAVis 1.23*. *GAP* и *SciDAVis* — программные продукты на открытом коде.

**Пример 1.** Программа *GAP*, которая находит все разложения вида  $2i = p + q, p \leq q$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа, выводит их на печать, подсчитывает количество различных разложений для данного четного числа, вычисляет среднее количество разложений, для всех натуральных чисел  $i$  из отрезка  $[m, n]$ .

```

1 Gold:=function(m,n)
2 local i,j,k,l,M,L;
3 l:=0; M:=[]; L:=[];
4 for k in [m..n] do
5 M[k]:=0; od;
6 for i in [m..n] do

```

Пользователь через клиентское приложение загружает изображение лица в базу данных на сервере, также он может выставить различные настройки изображения, такие как яркость, контрастность и другие, выбрать алгоритм распознавания лица, выставить параметры алгоритма и отправить на сервер изображение, где оно будет обрабатываться модулем компьютерного зрения. Найденное лицо будет классифицироваться исходя из лиц в базе данных [2].

По результатам классификации пользователю вернутся предлагаемый класс лица и графики зависимости точности распознавания лица от выставленных параметров изображения и алгоритма [3]. На рис. 1 представлена архитектура программного аппарата комплекса.

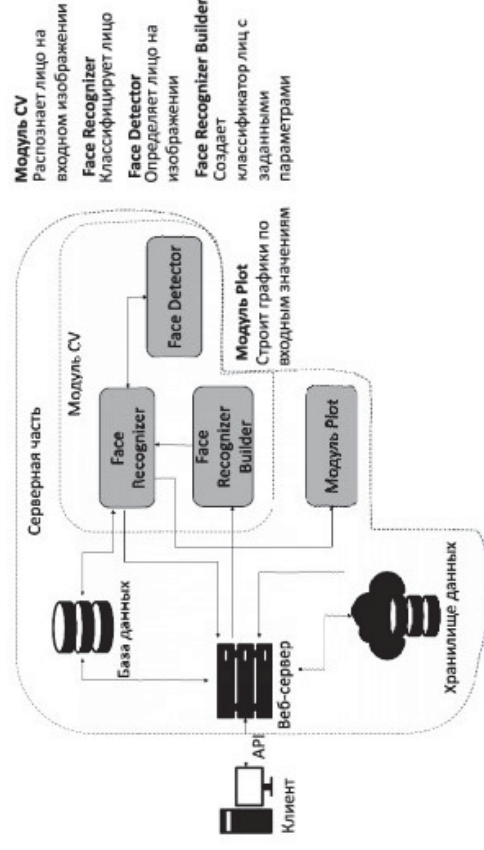


Рис. 1. Архитектура программно-аппаратного комплекса

### Описание пользовательского интерфейса

Интерфейс представляют четыре основных элемента: кнопка *Recognize* запускает распознавание лица из видеопотока камеры; поле выбора алгоритма распознавания — позволяет выбрать ал-



- 2) выполнить обзор подходящих инструментов разработки и существующих решений и выбрать наиболее подходящие инструменты для разработки аппаратного комплекса для изучения алгоритмов распознавания лиц;
- 3) спроектировать архитектуру и разработать алгоритмы взаимодействия пользователя с программно-аппаратным комплексом.

### Выбор средств реализации

Для реализации программно-аппаратного комплекса было принято решение выбрать следующие инструменты:

- Python — язык программирования;
- Django — веб-фреймворк, используется для реализации серверной части;
- QT — фреймворк для разработки ПО, используется для создания интерфейса клиентского приложения;
- OpenCV — библиотека алгоритмов компьютерного зрения;
- Celery — асинхронная очередь задач, используется для создания асинхронных задач распознавания лиц на изображениях;
- Redis — сетевое журналируемое хранилище данных, используется в качестве хранилища задач Celery;
- PostgreSQL — объектно-реляционная система управления базами данных [4].

### Архитектура комплекса

Система имеет клиент-серверную архитектуру. Взаимодействие клиента с сервером происходит через API-интерфейс.

```

7 for j in [1..Int((i-1)/2)] do
8   if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and
9     IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
10    M[j]:=M[j]+1; l:=l+1;
11    Print("i=",2*i,"->", 2*j+1,"+", 2*i-2*j-1, "\n");
12    fi; od;
13 L[1]:=M; L[2]:= l; L[3]:= 1.0*l/(n-m);
14 return(L); end;

```

**Пример 2.** Разложение четного числа в сумму двух простых чисел  $n = p + q, p \leq q$ , с минимально возможным первым слагаемым  $p$ , назовем минимальным разложением. Поведение минимального слагаемого  $p$  можно увидеть на рис. 2.

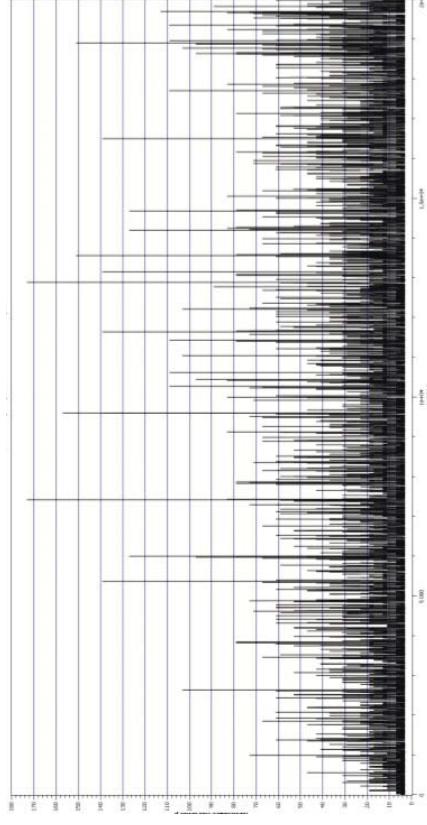


Рис. 2. Минимальные разложения Гольдбаха до 20 тыс

Минимальное слагаемое изменяется от 3 до 173. И это только для четных чисел, не превосходящих 20 тыс. Но его среднее значение на удивление меняется очень 'правильно' и хорошо приближается функцией  $\frac{5}{2} * l/n(n) - 16$ .

Поведение среднего значения минимального слагаемого вместе с функцией логарифма приведено на рис. 3. Шаг по оси абсцисс равен 1 млн., интервал от 0 до 4 млрд, график построен по 2 тыс. точек.

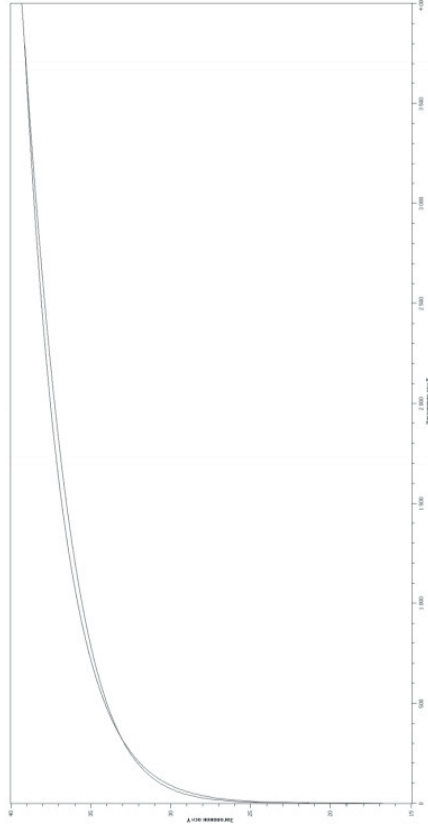


Рис. 3. Математическое ожидание минимального слагаемого  $p$  на интервале до 4 млрд

Программа поиска минимального элемента в разложении Гольдбаха и его математического ожидания:

```

1 Gold:=function(m,n)
2 local i,j,k,l,M;
3 l:=0.0;
4 for i in [m..n] do
5 for j in [1..Int((i-1)/2)] do
6 if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and
7 IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
8 l:=l+2*j+1; break;
9 fi; od;
10 Print( 1/(i-m)- (5/2)*Log(2.0*i)+16.0," ",\n" );
11 od; return(1); end;

```

Число различных разложений Гольдбаха тоже весьма важно для решения проблемы Гольдбаха. Количество этих разложений весьма причудливо меняется в очень больших пределах. Тем не менее, среднее значение числа разложений, их математическое ожидание оказывается очень хорошей функцией, самой лучшей из всех функций - линейной. Однако обычно там где есть простые числа, там почти всегда появляется логарифм.

## ● МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА ●

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 519.764

### РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ЛИЦ

А. А. Ильин<sup>1</sup>

Существует множество алгоритмов распознавания и обнаружения лиц на изображениях. Результаты выполнения программы зависят от освещения, контрастности, ракурса и поворота лица. Определение наилучших параметров алгоритмов и изображений почти невозможно вручную. Для решения данной проблемы разрабатывается комплекс, который позволит упростить изучение алгоритмов распознавания лиц.

#### Постановка задачи

В рамках настоящей работы поставлена задача разработать программно-аппаратный комплекс для изучения алгоритмов распознавания лиц, которую можно разбить на несколько подзадач, а именно:

- 1) выполнить обзор методов и алгоритмов обнаружения и распознавания лиц. Задача распознавания лиц подразделяется на задачу обнаружения лиц на изображениях и задачу распознавания лиц на изображениях. Для каждой из этих подзадач используются свои методы и алгоритмы;

<sup>1</sup>Ильин Александр Андреевич, магистрант кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета.  
E-mail: alexander.ilin.post@gmail.com

```

5 u, v = np.mgrid[0:2*np.pi:20j, 0:1*np.pi:20j]
6 x = np.cos(u)*np.sin(v)
7 y = np.sin(u)*np.sin(v)
8 z = np.cos(v)**2
9 fig = plt.figure()
10 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
11 ax.plot_wireframe(x,y,z)
12 plt.show()

```

Matplotlib - самая популярная библиотека Python для визуализации данных. Это библиотека для построения 2D-графиков, которой уже более 10 лет и которая поставляется с интерактивной платформой. Можно использовать данную библиотеку для создания графиков, гистограмм, спектров мощности, ствол-лист диаграмм, круговых диаграмм и многого другого [1].

### Список литературы

1. Марчук К.Л. Визуализации информации с использованием языка Python и его библиотеки Matplotlib. PLPLOT. – ВНТУ, 2020. – с. 32–49.
2. Сысоева М.В. Программирование с нуля на языке Python / под ред. И. Сысоев. – 1-е изд. – Москва : МАКС Пресс, 2018. – с. 180. – ISBN 978-5-9908979-5-3.
3. Буйначев С.К. Основы программирования на языке Python : учебное пособие / С. К. Буйначев, Н. Ю. Боклаг. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 91, с. 235. – ISBN 978-5-7996-1198-9
4. Федоров Д.Ю. Программирование на языке высокого уровня Python : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Д. Ю. Федоров. – 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 161 с.

Все проведенные вычисления однозначно указывают на положительное решение проблемы Гольдбаха. Но смысл этих экспериментов не только в этом. Возможно, они будут полезны при нахождении некоторого числового инварианта, связанного с разложениями Гольдбаха. Хотелось бы надеяться, что удастся доказать нечто про этот инвариант, что повлечет положительное решение проблемы Гольдбаха [1].

### Список литературы

1. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр. Компьютерная версия / Ю.Г. Игнатьев. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 204 с.
2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков // Труды V-я Междунар. науч.-практич.конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016). – Казань: КФУ, 2016. – С. 172–179.
3. Романов М.А. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / М.А. Романов, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф. (Екатеринбург, 27 февраля – 3 марта 2017г.). ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». – Екатеринбург, 2017. – С. 413–417.

```

11 plt.xlabel('Month')
12 plt.ylabel("Electricity losses")
13 plt.grid()
14 plt.legend()
15 plt.show()
    
```

● МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА ●

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 519.764

ЛОКАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ  
ЧИСЕЛ

Г. В. Кашкин<sup>1</sup>

В статье приводятся результаты вычислительного эксперимента по анализу локального распределения простых чисел, нахождения среднего простого числа на отрезке.

Поиск формулы простого числа одна из сложнейших математических проблем. Поскольку такой формулы пока не найдено, то важное значение имеет нахождение функции, которая указывает, какое количество простых чисел, не превосходит данное число  $x$ . Нахождением этой функции занималось много великих математиков, в том числе К.Ф.Гаусс (1777 - 1855), А.М. Лежандр (1752 - 1833). Но строго доказать теорему о глобальном распределении простых чисел удалось только Пафнутию Львовичу Чебышеву (1821 - 1894), члену Петербургской Академии наук и еще 24 академий мира [3].

**Определение 1.**  $\pi(x)$  — это функция, равная числу простых чисел, меньших либо равных действительному числу  $x$ .

**Теорема 1. (П.Л. Чебышев)** Имеет место приближенное равенство:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x) - 1} \tag{1}$$

<sup>1</sup> Кашкин Григорий Валентинович, старший преподаватель кафедры вычислительной техники Казанского федерального университета.  
E-mail: kfu.kashkin@gmail.com

Помимо построения графиков и зависимостей между двумя параметрами в библиотеке Matplotlib имеется возможность построения трехмерных объектов.

Трёхмерная графика — раздел компьютерной графики, посвящённый методам создания изображений путём моделирования объектов в трёхмерном пространстве (рис.2).

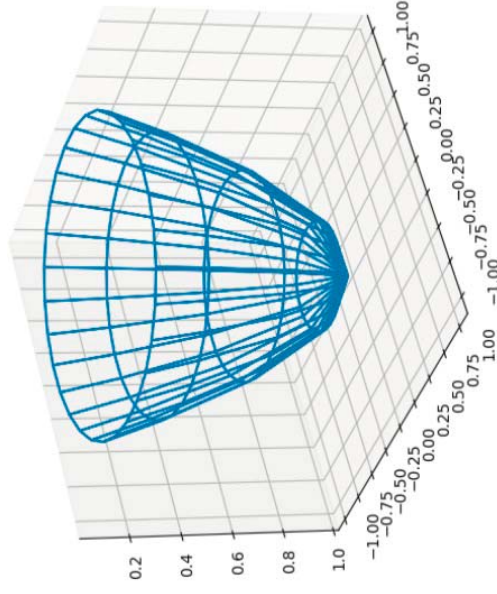


Рис. 2. Пример построения 3D каркаса фигуры при помощи Python

Приведём пример кода на языке Python:

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
3 import numpy as np
4
    
```

решающим образом зависят надежность, качество и экономичность электроснабжения потребителей, а от качества расчетов технических потерь в сетях 0,38 кВ – точность определения коммерческих потерь.

Из графика 1 видно, что нагрузочные потери в сетях 0,38 кВ, во много раз больше, чем нагрузочные потери в линиях 10 кВ, что говорит о проведении мероприятий по оптимизации сети для снижения потерь электроэнергии в электрических сетях.

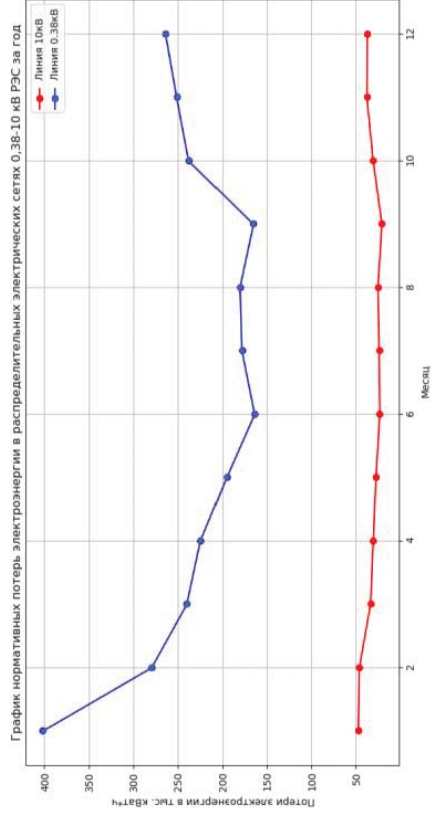


Рис. 1. Пример построения графика нормативных потерь электроэнергии при помощи Python

Построить график можно с помощью программного кода:

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 fig = plt.subplots(figsize=(15,10))
5 x = np.arange(1,13,1)
6 y1 = np.array([46,45,33,30,27,22,23,24,20,30,37,36])
7 x = np.arange(1,13,1)
8 plt.plot(x,y1,'ro',linestyle='-',label='Line 10kV')
9 plt.plot(x,y,'bo',linestyle='-',label='Line 0.38kV')
10 plt.title("Graph of regulatory losses of electricity in
distribution networks 0,38-
```

Согласно этой формуле среди 30-значных чисел простым являются каждое примерно 70-е число:

$$\ln(1030) = 30 * \ln(10) \approx 30 * 2.3 \approx 70).$$

А среди 300-значных чисел, с которыми работает современная криптография, простое, примерно, каждое 700-е натуральное число. Таким образом, получается, что, чем дальше от начала координат, тем реже встречаются простые числа. Есть даже более сильное утверждение.

**Вторая гипотеза Харди-Литлльвуда.** Для всех натуральных чисел  $x, y$  выполняется неравенство:

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \quad (2)$$

Эта гипотеза утверждает, что на любом отрезке  $[x, x+y]$  длинны  $y$  не может быть больше простых чисел, чем на отрезке  $[0, y]$ .

В настоящее время многие математики считают, что эта гипотеза не верна. И далеко от начала координат есть страна Эльдорадо, где простые числа встречаются чаще, чем в начале координат. К сожалению, если такие отрезки и существуют, то они находятся в районе 900-значных чисел.

Тема сгущения простых чисел, относится к локальному распределению простых чисел. Теорема П.Л. Чебышева говорит о том сколько примерно простых чисел расположено на отрезке данной длины, но как о ни на нем расположены неизвестно. Именно это расположение и есть проблема локального распределения простых чисел. Из технических соображений в дальнейшем вместо отрезка  $[1, x]$  будем рассматривать отрезок  $[1, 2x]$ .

Если бы простые числа были расположены на прямой равномерно, т.е. образовывали арифметическую прогрессию, то среднее значение простого числа, расположенного на отрезке  $[1, 2x]$  было бы равно  $\frac{2+2x}{2} = 1+x$ . Обратное утверждение, конечно, не верно. Если среднее значение простого числа равно  $1+x$ , это не означает, что простые числа расположены равномерно [2].

Рассмотрим на отрезке  $[1, 2x]$  множество простых чисел. Не теряя общности можем считать, что их четное число:

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2k-2}, p_{2k-1}, p_{2k}$ . Разобьем эти числа на пары:  $p_1 + p_{2k}, p_2 + p_{2k-1}, p_3 + p_{2k-2}, \dots$ . В силу теоремы Чебышева последовательность  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , рассмотренная слева направо, будет более плотной. Поэтому следует ожидать, что пары удовлетворяют неравенствам:  $p_1 + p_{2k} \geq p_2 + p_{2k-1} \geq p_3 + p_{2k-2} \geq \dots$

Очевидно, что при больших числах  $x$  первая пара дает сумму равную примерно  $1 + x$ . Очевидно также, что полусуммы всех остальных пар будут не больше, чем  $1 + x$  и, следовательно, среднее значение простого числа на отрезке  $[1, 2x]$  не должно превосходить  $1 + x$ .

**Определение 2.** Средним значением простого числа на отрезке  $[1, 2x]$  называется отношение

$$S(2x) = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{2k-1} + p_{2k}}{2k} \quad (3)$$

Теперь оценим это отношение. В силу теоремы Чебышева, если мы разделим отрезок  $[1, 2x]$  на две половинки  $[1, x], [x + 1, 2x]$ , то левая половина будет содержать больше простых чисел. Следовательно, некоторое количество левых слагаемых, в качестве правого слагаемого, неизбежно будут иметь партнера из левой половины. Их полусумма обязательно будет меньше  $\frac{x+1}{2}$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $S(2x)$  — это среднее значение простого числа, не превосходящего  $2x$ . Число  $x + 1$  — среднее значение простого числа на отрезке  $[1, 2x]$ , при условии, что простые числа распределены равномерно на отрезке. Тогда, согласно теореме Чебышева, отношение реального среднего значения простого числа к идеальному  $x + 1$  может быть оценено

$$\frac{S(2x)}{x + 1} \leq 1 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)}. \quad (4)$$

Однако, утверждение 1 говорит о теоретическом значении среднего простого числа на отрезке с учетом глобального распределения простых чисел.

Основное преимущество программ, предназначенных только для создания двумерных и трёхмерных графиков, заключается в том, что можно построить построение графика в прогамму, производящую вычисления. Кроме того, скрипты позволяют легко перестраивать графики с новыми данными, автоматизировать их построение, а также дают почти неограниченный контроль над точностью позиционирования и размером графиков [2].

Python — высокоуровневый язык программирования общего назначения, ориентированный на повышение производительности разработчика и читаемости кода. Модуль matplotlib — специализированная библиотека для языка Python. Основное её преимущество в простоте и быстроте использования, а также она позволяет делать графики очень высокого качества [3].

Графиком функции называется множество точек плоскости таких, что абсциссы и ординаты этих точек удовлетворяют уравнению  $y = f(x)$ . Построим график нагрузочных потерь электроэнергии за год для линий 10кВ и 0,38кВ по таблице 1.

Расчетный период	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Нагрузочные 0,38 кВ	401	279	239	224	195	163	178	180	165	237	251	263
Нагрузочные 10 кВ	47	46	33	30	27	22	23	24	20	30	37	36

Таблица 1: Потери электроэнергии в распределительных электрических сетях 0,38-10 кВ РЭС

В Республике Беларусь в целом сети 0,38 кВ составляют около 40% от суммарной протяженности линий электропередач общей протяженностью 202,509 км (воздушные) и 39,923 км (кабельные). От надежности работы сетей 0,38 кВ и их загрузки

**Пример 1.** Программа *GAP*, которая находит все простые числа на отрезке  $[m, n]$ , из суммы и отношения реального среднего простого числа и теоретического, при условии, что все простые числа расположены на отрезке равномерно. Также программа с шагом 1 млн. простых чисел выводит на печать промежуточные результаты – количество найденных простых чисел, текущее значение счетчика и текущее значение отношения реального и теоретического среднего простого числа.

```

1 MedPrime:=function(m, n)
2 local i, j, l, k;
3 j:=0; l:=0.0;
4 for i in [m..n] do
5 k:=2*i+1;
6 if IsProbablyPrimeInt(k) then
7 j:=j+1; l:=l+k; k:=0;
8 if j mod 10^6 = 0 then
9 Print("j=", j, ", " -> ", "i=", i, " -> ",
10 "S=", l/j, " -> ", "D=", l/(j*(i+1.5)), " \n");
11 fi;
12 od; return(1); end;

```

Значение отношения очень близко к 1 и лежит в интервале (0.974, 0.9797) и график очень похож на логарифм. Он построен по 147 точкам.

Функция

$$1 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)},$$

построена по тем же 147 точкам. Графики очень похожи. Однако теоретическое, явно завышенное отношение, естественно, больше, но очень не намного, всего примерно на 0.01. Это удивительно и неожиданно. На основании этих вычислений можно выдвинуть следующие гипотезы.

**Гипотеза 1.** Отношение реального среднего значения простого

• МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА •

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 519.11

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ  
PYTHON

О. С. Антипенко<sup>1</sup>

Визуализация данных — это наглядное представление массивов различной информации. Визуальная информация лучше воспринимается и позволяет быстро донести до зрителя собственные мысли и рассуждения. Физиологически, восприятие визуальной информации является основной для человека, так как 90% всей информации человек воспринимает через зрение. Существует огромное количество способов визуализации данных, но самым простым, а потому и самым распространенным методом визуализации являются графики.

**Примеры создания графиков**

Современные компьютерные программы, предоставляющие функцию построения графиков, условно можно разделить на две составляющие:

- 1) программы с визуальным интерфейсом, выполняющие различные функции, например: MS Excel, OpenOffice Calc, Statistica, Grapher.
- 2) программы, предназначенные только для создания двумерных и трёхмерных графиков, например: MATLAB и SciLab и различные библиотеки вроде PGPlot и PLOT [4].

<sup>1</sup> Антипенко Олег Семёнович, кандидат технических наук, доцент кафедры защиты информации Самарского государственного технического университета. E-mail: antipenko80@gmail.com

числа  $S(2x)$  на отрезке  $[1, 2x]$  может быть задано формулой:

$$\frac{S(2x)}{x+1} \approx 0.993 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)} \quad (5)$$

При этом при  $x > 2 * 10^9$  отклонение составляет меньше 0.001.

В подтверждение этой гипотезы можно привести график отклонения реального отношения среднего простого числа и оценочной функции  $0.993 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)}$ .

### Список литературы

1. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков // Труды V-я Международ. науч.-практич. конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016). – Казань: КФУ, 2016. – С. 172–179.
2. Романов М.А. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / М.А. Романов, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф. (Екатеринбург, 27 февраля – 3 марта 2017г.). ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». – Екатеринбург, 2017. – С. 413–417.
3. Ситников В.М. Основы теории чисел: учебное пособие / В.М. Ситников, Н. Д. Никитин, О. Г. Никитина. – Челябинск: Изд-во Челябин. гос. пед. ун-та, 2014. – 116 с.

- магнитное или электрическое поля, если рассматривается некоторое уравнение, получаемое из уравнений Максвелла (тогда краевые условия называют магнитными или электрическими краевыми условиями, соответственно).

В математической физике эллиптические уравнения возникают в задачах, сводящихся лишь к простейшим координатам: от времени либо ничего не зависит (стационарные процессы), либо оно каким-то образом исключается.

### Список литературы

1. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
2. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие. / Д.П. Голоскоков. – Часть 1. – М.: МИФИ, 2008. – 616 с.
3. Свешников А.Г. Лекции по математической физике: Учеб. пособие / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
4. Сочнева В.А. Введение в математическую физику: Методическое пособие. / В.А. Сочнева. – Казань: Казанский университет. – 2014. – 75 с.
5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.



$$\int_G [\Psi_{\Delta} \Psi + (\nabla \Psi)^2] d\tau = \int_S \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma, \quad \Psi \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G}). \quad (8)$$

В силу (7), из тождества (8) находим

$$\int_G (\nabla \Psi)^2 d\tau = 0 \Rightarrow \Psi = const, \quad x \in G. \quad (9)$$

Так как функция  $\Psi$  предполагается непрерывной и  $\Psi = 0$  на  $S$ , то  $\Psi = 0$  в  $G$ , следовательно,  $u_1 = u_2$  в  $G$ .  
Утверждение доказано.



Петер Дирихле — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Задача Дирихле — вид задач, являющийся при решении дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Задача называется внутренней задачей Дирихле или первой краевой задачей. Сами условия называются условиями Дирихле или первыми краевыми условиями. Второе название может трактоваться шире, обозначая любую задачу решения дифференциального уравнения, когда известно значение искомого функции на всей границе области. В случае, когда надо найти значения функции вне области  $\Omega$ , задача называется внешней задачей Дирихле [5].

Рис. 1. П. Дирихле

**Физическая интерпретация условий Дирихле** — поведение искомой величины на границе:

- температуры, если рассматривается уравнение теплопроводности;
- поля скорости, если рассматривается уравнение Стокса;

## • МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА •

### ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 531(075.8)

### ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ

М.Н. Кирсанов<sup>1</sup>

В статье описаны численные, графические и аналитические с привлечением системы компьютерной математики Maple алгоритмы получения решения задач статики плоских ферм. Рассмотрены случаи кинематической изменяемости некоторых схем ферм.

#### Метод вырезания узлов

Одним из наиболее распространенных методов определения усилий в стержнях плоских и пространственных ферм является метод вырезания узлов.

**Пример 1.** *Плоская статически определяемая балочная ферма имеет две опоры, одна из которых является подвижным шарниром, другая — неподвижным (рис. 1). К узлам верхнего пояса приложены вертикальные силы  $P = 1, a = 3, h = 2$ . Найти усилия в стержнях фермы.*

Определяем реакции опор фермы 2. Отбрасываем связи (опорные шарниры) и заменяем действие этих связей реакциями  $X_B, Y_A, Y_B$  (рис. 2). Выбираем систему координат с началом в точке А. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = X_B = 0 \quad (1)$$

<sup>1</sup>Кирсанов Михаил Николаевич, профессор кафедры РМДиПМ Национального исследовательского университета «МЭИ».  
E-mail: mpei2004@yandex.ru

$$\sum M_A = 2aY_B - aP - aR = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_B = -2aY_A + 2aP + aR = 0 \quad (3)$$

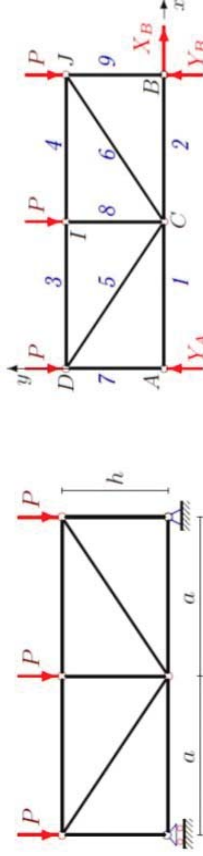


Рис. 1. Ферма 1

Рис. 2. Ферма 2

Решение системы уравнений дает реакции опор:  $X_B = 0$ ,  $Y_A = Y_B = 3P/2 = 1,5$ . Для проверки вертикальных реакций можно составить сумму проекций на ось  $y$  всех сил, действующих на ферму:  $\sum Y_i = Y_A + Y_B - 3P = 0$ . Уравнение удовлетворяется тождественно. Реакции  $Y_A$  и  $Y_B$  найдены верно. Эта задача простейшая, и, безусловно, ее решить можно еще проще, исходя из симметрии конструкции и нагрузок. Ответ тут очевиден [2].

### Метод сечений

Другой известный метод определения усилий в стержнях предложил в 1882 г. Август Риггер. Этот метод еще называют методом сечений, так как усилия в стержнях находятся после рассечения фермы на две части. При этом отсекаемая часть должна содержать по крайней мере один стержень, а сечение выбирается так, что оно пересекает три (не больше и не меньше) стержня фермы и делит ее на две части. По сравнению с методом вырезания узлов метод сечений имеет ограничения в применении. Не всякий стержень входит в требуемое сечение. Поэтому как правило метод сечений дополняется методом вырезания узлов [3].

где  $\phi'(x, y) = const$  — функция, комплексно сопряженная с функцией  $\phi(x, y)$ . Если теперь перейти к комплексным переменным  $\varepsilon = \phi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ , то, согласно общей теории, уравнение 1 приведет к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} = \Phi\left(\varepsilon, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad (4)$$

то есть точно к такому же виду, как и гиперболическое уравнение [2]. Чтобы остаться в действительной области, сделаем еще одну замену переменных:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi'}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi'}{2i}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — новые переменные. Тогда  $\varepsilon = \alpha + i\beta$ ,  $\eta = \alpha - i\beta$ .

Таким образом, уравнение 1 приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Theta(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}) \quad (6)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллиптического типа [3].

### Единственность решения задачи Дирихле

Решение задачи Дирихле будем искать в классе функций  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G})$ . Утверждается, что решение задачи Дирихле в этом классе функций единственно. Докажем эту теорему в случае, когда  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ . Допустим, что существует два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ .

Очевидно, что

$$\Delta \Psi = 0, \quad \Psi \in C^{(2)}(G), \quad \Psi|_S = 0, \quad \Psi \in C^{(1)}(S) \quad (7)$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству того, что в данном классе функций нет другого решения задачи, кроме как решения  $\Psi \equiv 0$ . Это последнее решение очевидно в силу однородности задачи [1]. Воспользуемся тождеством

Для определения усилий  $S_1, S_3, S_5$  используем метод Риттера. Произведем сечение I-I (рис. 3).

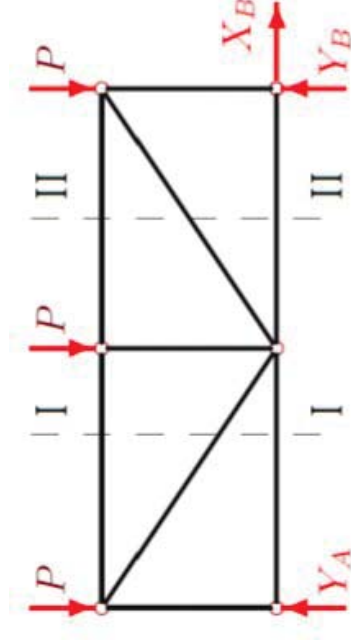


Рис. 3.

Отбрасываем правую часть фермы (рис. 4). Действие расчлененных стержней заменяем силами, направленными в сторону сечения. Выбор направлений реакций обеспечивает принятое ранее правило. Сжатые стержни имеют отрицательные усилия.

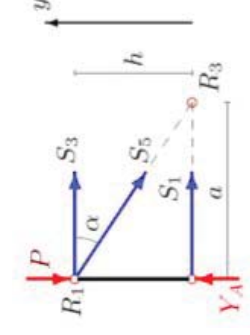


Рис. 4.

Рассматриваем равновесие оставшейся левой части, состоящей из одного вертикального стержня. Находим моментные точки  $R_1, R_3$  на пересечениях линий действия усилий в сечении. Обозначать эти точки можно произвольно, но для определенности лучше именовать их номером стержня, усилие которого не проходит через эту точку и поддежит определению. Точка Риттера может быть две или три. Точка Риттера не существует для диагонального стержня, входящего в сечение с параллельными стержнями [4]. Составляем уравнения моментов относительно найденных точек:

$$\sum M_{R_3} = -hS_3 + aP - aY_A = 0 \quad (4)$$

• МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА •

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И  
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ИНФОРМАТИКИ

Выпуск 3 \* 2021

УДК 517.958

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

А.А. Филиппов<sup>1</sup>

Рассматривается преобразование уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Рассматриваются виды уравнений эллиптического типа — уравнения Лапласа, Пуассона. Сформулированы основные типы краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Уравнения эллиптического типа

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (1)$$

$A, B, C, D, E, F, G$  — заданные функции от  $x$  и  $y$ .

Пусть  $\phi(x, y)$  — комплексный интеграл уравнения

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2)$$

Тогда  $\phi'(x, y) = const$  — интеграл уравнения,

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Филиппов Александр Андреевич, доцент, кандидат физико-математических наук Орловского государственного университета.  
E-mail: filippov.alexandr@yandex.ru

$$\sum M_{R_1} = hS_1 = 0 \quad (5)$$

Получаем  $S_1 = 0$ ,  $S_3 = -Pa/(2h) = -0,75$  кН. Для стержня 5 точки Риттера нет, так как стержни 1 и 3 параллельны. В этом случае усилие  $S_5$  можно найти из уравнения проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням.

$$\sum Y_i = -S_5 \sin \alpha + Y_A - P = 0 \quad (6)$$

Отсюда  $S_5 = (Y_A - P) / \sin \alpha = Pc/(2h) = 0,90$  кН.

Для определения усилий  $S_2, S_6, S_4$  произведем сечение II-II. Отбрасываем левую часть фермы и рассматриваем равновесие правой части фермы, фактически равновесие одного стержня (правой стойки) под действием реакций стержней  $S_2, S_4, S_6$ , силы  $P$  и найденных заранее реакций опор  $X_B$  и  $Y_B$ . Разрезанные стержни заменяем усилиями, направленными по стержням в сторону сечения [1]. Составляем уравнения моментов относительно найденных точек Риттера:

$$\sum M_{R_2} = -hS_2 + hX_B = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_{R_4} = hS_4 + aY_B - aP = 0 \quad (8)$$

Получаем  $S_2 = 0$ ,  $S_4 = -Pa/(2h) = -0,75$  кН. Реакцию раскоса 6 находим из уравнения проекций на ось  $y$ :

$$\sum Y_i = -S_6 \sin \alpha + Y_B - P = 0 \quad (9)$$

Получаем  $S_6 = (Y_B - P) \sin \alpha = Pc/(2h) = 0,90$  кН.

### Список литературы

1. Белянкин Н.А. Формулы для определения деформаций внешне статически неопределимой фермы от действия сосредоточенной и распределенной нагрузки / Н.А. Белянкин,

А.Ю. Бойко, А.А. Плясова // Строительство и архитектура. – 2017. – Т.5, №4. – С. 197–200.

2. Воронкин А.В. Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы с нисходящими раскосами / А.В. Воронкин // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по маг-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. – Тамбов, 2015. – С. 37–38.
3. Канагова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы / М.И. Канагова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 31–34.
4. Реутов Д. О. Аналитическое выражение прогиба слабо вращенной балочной фермы // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 3. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. – С. 128–129.