**ФункциЯ роста Гомпертца**

Ермолина А.А., студент-магистрант 2 курса

г. Красноярск

Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнёва

**Аннотация**

В статье представлены этапы использования функции роста Гомпертца для выравнивания зависимостей средней высоты и возраста, среднего диаметра и возраста применительно к сосновым древостоям Центральной и Восточной Сибири (I и V классов бонитета). Уравнение показало достаточную адекватность при аппроксимации зависимостей.

Изучение «геометрического» результата роста составляет одну из задач динамической морфологии (учение о морфогенезе) растений.

Логистическая функция и функция Гомпертца отражает феноменологическую суть ростового процесса. График логистической функции представляет собой симметричную S-образную кривую, поэтому данной функцией следует пользоваться тогда, когда эмпирические точки, характеризующие рост органа во времени, располагаются на графике симметричным образом. Если же эмпирические данные указывают на асимметрию кривой за счет растянутости верхней ветвей, то вместо логистической функции следует использовать функцию, предложенную Б. Гомпертцом.

(1)

где у – числовое значение ростового признака;

А – расстояние между нижней и верхней асимптотами;

x – время, прошедшее с начала роста;

а, b, – константы уравнения, определяющие наклон, изгиб и точку перегиба кривой.

Произведены расчеты регрессии роста средней высоты и среднего диаметра уравнением функции Гомпертца для древостоев I и V бонитета. Результаты представлены в вспомогательных таблицах 15-18, а также построены графики кривой роста для изучаемых показателей (рисунки 1-3).

**Исходные данные** представлены в таблицах 1,2.

Таблица 1 – Исходные данные хода роста полных сосновых древостоев в Центральной и Восточной Сибири (I бонитет)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Возраст, лет | Средняя высота, м | Средний диаметр, см | Число деревьев, шт. |
| 20 | 7,6 | 5,4 | 8729 |
| 30 | 11,8 | 9,4 | 4096 |
| 40 | 15,6 | 13,5 | 2380 |
| 50 | 18,8 | 17,5 | 1527 |
| 60 | 21,5 | 21,4 | 1123 |
| 70 | 23,8 | 25,0 | 856 |
| 80 | 25,7 | 28,2 | 685 |
| 90 | 27,3 | 31,2 | 568 |
| 100 | 28,6 | 33,9 | 486 |
| 110 | 29,7 | 36,3 | 426 |
| 120 | 30,5 | 38,5 | 382 |
| 130 | 31,3 | 40,4 | 347 |
| 140 | 31,8 | 42,0 | 320 |
| 150 | 32,3 | 43,5 | 299 |
| 160 | 32,7 | 44,8 | 282 |
| 170 | 33,0 | 46,0 | 268 |
| 180 | 33,2 | 47,0 | 257 |

Таблица 2 – Исходные данные хода роста полных сосновых древостоев в Центральной и Восточной Сибири (V бонитет)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Возраст, лет | Средняя высота, м | Средний диаметр,  см | Число деревьев,  шт. |
| 20 | 1,2 | 1,9 | 53170 |
| 30 | 2,9 | 3,6 | 21165 |
| 40 | 4,8 | 5,5 | 10255 |
| 50 | 6,9 | 7,5 | 5813 |
| 60 | 8,9 | 9,5 | 3716 |
| 70 | 10,7 | 11,4 | 2601 |
| 80 | 12,3 | 13,2 | 1951 |
| 90 | 13,7 | 14,8 | 1543 |
| 100 | 14,9 | 16,3 | 1271 |
| 110 | 15,8 | 17,7 | 1082 |
| 120 | 16,6 | 18,9 | 946 |
| 130 | 17,3 | 20,0 | 844 |
| 140 | 17,8 | 21,0 | 767 |
| 150 | 18,3 | 21,9 | 707 |
| 160 | 18,6 | 22,7 | 659 |
| 170 | 18,9 | 23,4 | 621 |
| 180 | 19,1 | 24,0 | 590 |

По данным таблиц 1,2 построены графики зависимости основных показателей древостоя от возраста (рисунок 1-3).

**Вывод** по данным графиков следует отметить зависимость основных таксационных показателей от бонитета древостоев. Ход роста средней высоты у древостоев I бонитета выше, чем у древостоев V бонитета (при 180 лет: 33,2 > 19,1 м). Такая же зависимость наблюдается в ходе роста среднего диаметра при возрасте 180 лет, наибольшее значение для древостоя I

Рисунок 1 – Зависимость средней высоты от возраста

Рисунок 2 – Зависимость среднего диаметра от возраста

Рисунок 3 – Зависимость числа деревьев от возраста

бонитета – 47 см, а для V бонитета – 24 см. При анализе хода роста численности следует отметить, большой отрыв численности в древостое V бонитета, в отличие от   
I бонитета. К 180 годам от численности в 20-летнем возрасте осталось для   
I бонитета 257 шт. (2,9 %), для V бонитета – 590 шт. (1,1 %).

В таблицах 3-6 приведены промежуточные таблицы, необходимые для вычисления коэффициентов функции Гомпертца. На рисунках 4-7 отображены линии выравнивания.

Таблица 3 – Выравнивание эмпирического ряда регрессии роста по средней высоте в сосновом древостое I бонитета

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Эмпирические данные (А=33,2; n=16) | | | | | | | |
| х | х2 | y | А/у | log A/y | log log A/y=z | xz | увыр |
| 20 | 400 | 7,6 | 4,3684 | 0,6403 | -0,1936 | -3,8720 | 6,3 |
| 30 | 900 | 11,8 | 2,8136 | 0,4493 | -0,3475 | -10,4252 | 10,0 |
| 40 | 1600 | 15,6 | 2,1282 | 0,3280 | -0,4841 | -19,3643 | 13,9 |
| 50 | 2500 | 18,8 | 1,7660 | 0,2470 | -0,6073 | -30,3669 | 17,7 |
| 60 | 3600 | 21,5 | 1,5442 | 0,1887 | -0,7242 | -43,4537 | 21,1 |
| 70 | 4900 | 23,8 | 1,3950 | 0,1446 | -0,8399 | -58,7964 | 23,9 |
| 80 | 6400 | 25,7 | 1,2918 | 0,1112 | -0,9539 | -76,3101 | 26,2 |
| 90 | 8100 | 27,3 | 1,2161 | 0,0850 | -1,0707 | -96,3636 | 28,0 |
| 100 | 10000 | 28,6 | 1,1608 | 0,0648 | -1,1886 | -118,8612 | 29,3 |
| 110 | 12100 | 29,7 | 1,1178 | 0,0484 | -1,3153 | -144,6851 | 30,4 |
| 120 | 14400 | 30,5 | 1,0885 | 0,0368 | -1,4337 | -172,0441 | 31,1 |
| 130 | 16900 | 31,3 | 1,0607 | 0,0256 | -1,5919 | -206,9426 | 31,7 |
| 140 | 19600 | 31,8 | 1,0440 | 0,0187 | -1,7279 | -241,9065 | 32,1 |
| 150 | 22500 | 32,3 | 1,0279 | 0,0119 | -1,9232 | -288,4736 | 32,4 |
| 160 | 25600 | 32,7 | 1,0153 | 0,0066 | -2,1811 | -348,9748 | 32,6 |
| 170 | 28900 | 33,0 | 1,0061 | 0,0026 | -2,5810 | -438,7721 | 32,8 |
| 180 |  | 33,2 |  |  |  |  |  |
| **Σ 1520** | **178400** |  |  |  | **-19,1640** | **-2299,6124** |  |

y = А / (10^(10^(0,1407-(0,0141\*x))))

Рисунок 4 – График выравнивания эмпирического ряда регрессии роста по средней высоте в сосновом древостое I бонитета

Таблица 4 – Выравнивание эмпирического ряда регрессии роста по среднему диаметру в сосновом древостое I бонитета

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Эмпирические данные (А=47,0; n=16) | | | | | | | |
| х | х2 | y | А/у | log A/y | log log A/y=z | xz | у выр |
| 20 | 400 | 5,4 | 8,7037 | 0,9397 | -0,0270 | -0,5402 | 4,2 |
| 30 | 900 | 9,4 | 5,0000 | 0,6990 | -0,1555 | -4,6662 | 7,4 |
| 40 | 1600 | 13,5 | 3,4815 | 0,5418 | -0,2662 | -10,6476 | 11,5 |
| 50 | 2500 | 17,5 | 2,6857 | 0,4291 | -0,3675 | -18,3741 | 16,1 |
| 60 | 3600 | 21,4 | 2,1963 | 0,3417 | -0,4664 | -27,9825 | 20,8 |
| 70 | 4900 | 25,0 | 1,8800 | 0,2742 | -0,5620 | -39,3400 | 25,2 |
| 80 | 6400 | 28,2 | 1,6667 | 0,2218 | -0,6539 | -52,3154 | 29,2 |
| 90 | 8100 | 31,2 | 1,5064 | 0,1779 | -0,7497 | -67,4747 | 32,7 |
| 100 | 10000 | 33,9 | 1,3864 | 0,1419 | -0,8480 | -84,8023 | 35,7 |
| 110 | 12100 | 36,3 | 1,2948 | 0,1122 | -0,9500 | -104,5045 | 38,1 |
| 120 | 14400 | 38,5 | 1,2208 | 0,0866 | -1,0623 | -127,4755 | 40,0 |
| 130 | 16900 | 40,4 | 1,1634 | 0,0657 | -1,1823 | -153,7023 | 41,6 |
| 140 | 19600 | 42,0 | 1,1190 | 0,0488 | -1,3111 | -183,5607 | 42,8 |
| 150 | 22500 | 43,5 | 1,0805 | 0,0336 | -1,4735 | -221,0324 | 43,8 |
| 160 | 25600 | 44,8 | 1,0491 | 0,0208 | -1,6815 | -269,0436 | 44,5 |
| 170 | 28900 | 46,0 | 1,0217 | 0,0093 | -2,0297 | -345,0408 | 45,1 |
| 180 |  | 47,0 |  |  |  |  |  |
| **Σ 1520** | **178400** |  |  |  | **-13,7868** | **-1710,5030** |  |

y = A / (10^(10^(0,2581-(0,0118\*x))))

Рисунок 5 – График выравнивания эмпирического ряда регрессии роста по среднему диаметру в сосновом древостое I бонитета

Таблица 5 – Выравнивание эмпирического ряда регрессии роста по средней высоте в сосновом древостое V бонитета

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Эмпирические данные (А=19,1; n=16) | | | | | | | |
| х | х2 | y | А/у | log A/y | log log A/y=z | xz | увыр |
| 20 | 400 | 1,2 | 15,9167 | 1,2019 | 0,0799 | 1,5970 | 0,9 |
| 30 | 900 | 2,9 | 6,5862 | 0,8186 | -0,0869 | -2,6073 | 2,2 |
| 40 | 1600 | 4,8 | 3,9792 | 0,5998 | -0,2220 | -8,8800 | 4,0 |
| 50 | 2500 | 6,9 | 2,7681 | 0,4422 | -0,3544 | -17,7198 | 6,2 |
| 60 | 3600 | 8,9 | 2,1461 | 0,3316 | -0,4793 | -28,7597 | 8,6 |
| 70 | 4900 | 10,7 | 1,7850 | 0,2516 | -0,5992 | -41,9443 | 10,7 |
| 80 | 6400 | 12,3 | 1,5528 | 0,1911 | -0,7187 | -57,4940 | 12,6 |
| 90 | 8100 | 13,7 | 1,3942 | 0,1443 | -0,8407 | -75,6626 | 14,2 |
| 100 | 10000 | 14,9 | 1,2819 | 0,1078 | -0,9672 | -96,7192 | 15,4 |
| 110 | 12100 | 15,8 | 1,2089 | 0,0824 | -1,0842 | -119,2618 | 16,4 |
| 120 | 14400 | 16,6 | 1,1506 | 0,0609 | -1,2152 | -145,8243 | 17,1 |
| 130 | 16900 | 17,3 | 1,1040 | 0,0430 | -1,3667 | -177,6658 | 17,7 |
| 140 | 19600 | 17,8 | 1,0730 | 0,0306 | -1,5141 | -211,9725 | 18,0 |
| 150 | 22500 | 18,3 | 1,0437 | 0,0186 | -1,7309 | -259,6352 | 18,3 |
| 160 | 25600 | 18,6 | 1,0269 | 0,0115 | -1,9385 | -310,1651 | 18,6 |
| 170 | 28900 | 18,9 | 1,0106 | 0,0046 | -2,3399 | -397,7890 | 18,7 |
| 180 |  | 19,1 |  |  |  |  |  |
| **Σ 1520** | **178400** |  |  |  | **-15,3781** | **-1950,5033** |  |

y = А / (10^(10^(0,4068-(0,0144\*x))))

Рисунок 6 – График выравнивания эмпирического ряда регрессии роста по средней высоте в сосновом древостое V бонитета

Таблица 6 – Выравнивание эмпирического ряда регрессии роста по среднему диаметру в сосновом древостое V бонитета

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Эмпирические данные (А=24,0; n=16) | | | | | | | |
| х | х2 | y | А/у | log A/y | log log A/y=z | xz | увыр |
| 20 | 400 | 1,9 | 12,6316 | 1,1015 | 0,0420 | 0,8394 | 1,4 |
| 30 | 900 | 3,6 | 6,6667 | 0,8239 | -0,0841 | -2,5236 | 2,7 |
| 40 | 1600 | 5,5 | 4,3636 | 0,6398 | -0,1939 | -7,7569 | 4,6 |
| 50 | 2500 | 7,5 | 3,2000 | 0,5051 | -0,2966 | -14,8290 | 6,8 |
| 60 | 3600 | 9,5 | 2,5263 | 0,4025 | -0,3952 | -23,7148 | 9,2 |
| 70 | 4900 | 11,4 | 2,1053 | 0,3233 | -0,4904 | -34,3270 | 11,5 |
| 80 | 6400 | 13,2 | 1,8182 | 0,2596 | -0,5856 | -46,8506 | 13,7 |
| 90 | 8100 | 14,8 | 1,6216 | 0,2099 | -0,6779 | -61,0097 | 15,7 |
| 100 | 10000 | 16,3 | 1,4724 | 0,1680 | -0,7746 | -77,4630 | 17,4 |
| 110 | 12100 | 17,7 | 1,3559 | 0,1322 | -0,8786 | -96,6508 | 18,7 |
| 120 | 14400 | 18,9 | 1,2698 | 0,1037 | -0,9840 | -118,0817 | 19,9 |
| 130 | 16900 | 20,0 | 1,2000 | 0,0792 | -1,1014 | -143,1791 | 20,8 |
| 140 | 19600 | 21,0 | 1,1429 | 0,0580 | -1,2366 | -173,1285 | 21,5 |
| 150 | 22500 | 21,9 | 1,0959 | 0,0398 | -1,4005 | -210,0714 | 22,1 |
| 160 | 25600 | 22,7 | 1,0573 | 0,0242 | -1,6164 | -258,6315 | 22,5 |
| 170 | 28900 | 23,4 | 1,0256 | 0,0110 | -1,9588 | -332,9942 | 22,9 |
| 180 |  | 24,0 |  |  |  |  |  |
| **Σ 1520** | **178400** |  |  |  | **-12,6328** | **-1600,3725** |  |

y =A /(10^(10^(0,3288-(0,0118\*x))))

Рисунок 7 – График выравнивания эмпирического ряда регрессии роста по среднему диаметру в сосновом древостое V бонитета.

**Вывод.** Таким образом, расчет ручным способом расчет коэффициента Гомпертца по всем признакам (средняя высота, средний диаметр) показал корректность применения данного метода при исследовании числовых характеристик изучаемых зависимостей.