**СТРОЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ СОСНЫ ПО ДИАМЕТУ**

Каштальянов П.А., студент-магистрант 2 курса

г. Красноярск

Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнёва

**Аннотация**

В статье представлены этапы использования различных функций (нормального распределения, распределение Максвелла, распределение Рэлея, показательное распределения) для аппроксимации рядов распределения по диаметру. Исходные ряды в большей степени соответствуют кривой нормального распределения.

**Построение рядов нормального распределения**

Проверка на соответствие исходного вариационного ряда нормальному распределению позволяет применить статистический аппарат для интерпретации статистических выводов. Сопоставляются эмпирические частоты теоретическому распределению.

Таблица 1 – Нормальное распределение первого ряда

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi см | ni, шт | a=xi-xcp, центральное отклонение | t= нормированное отклонение | h, отн. Ордината | h\*H фактич. Ордината | ni, округленная частота |
|
| 4 | 0 | -14 | -2,45 | 0,0198 | 0,34 | 1 |
| 8 | 1 | -10 | -1,75 | 0,0863 | 1,49 | 2 |
| 12 | 4 | -6 | -1,06 | 0,2275 | 3,94 | 4 |
| 16 | 3 | -2 | -0,37 | 0,3726 | 6,45 | 5 |
| 20 | 6 | 2 | 0,32 | 0,379 | 6,56 | 7 |
| 24 | 8 | 6 | 1,02 | 0,2371 | 4,11 | 4 |
| 28 | 2 | 10 | 1,71 | 0,0925 | 1,60 | 2 |
| 32 | 1 | 14 | 2,40 | 0,0224 | 0,39 | 1 |
| ∑ | 25 |   |   |   | 24,54 | 25 |

Н=17,31; N=25; Хср=18,12; G=5,78

Рисунок 1 – Полигон ряда распределения (N=25)

Таблица 2 – Нормальное распределение устойчивого ряда

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | ni, шт | a=xi-xcp, центральное отклонение | t= нормированное отклонение | h, отн. Ордината | h\*H фактич. Ордината | ni, округленная частота |
|
| 4 | 0 | -12 | -1,84 | 0,0707 | 6,647971 | 7 |
| 8 | 14 | -8 | -1,22 | 0,1895 | 17,81882 | 18 |
| 12 | 43 | -4 | -0,59 | 0,3352 | 31,5191 | 32 |
| 16 | 22 | 0 | 0,04 | 0,3986 | 37,48064 | 38 |
| 20 | 35 | 4 | 0,67 | 0,3187 | 29,96759 | 30 |
| 24 | 24 | 8 | 1,29 | 0,1736 | 16,32373 | 17 |
| 28 | 8 | 12 | 1,92 | 0,0632 | 5,942741 | 6 |
| 32 | 4 | 16 | 2,55 | 0,0154 | 1,448073 | 2 |
| ∑ | 150 |   |   |   | 147,15 | 150 |

Н=94,03; N=150; Хср=15,76; G=6,38

Рисунок 2 – Полигон ряда распределения (N=150)

Таблица 3 – Нормальное распределение последнего ряда

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | ni, шт | a=xi-xcp, центральное отклонение | t= нормированное отклонение | h, отн. Ордината | h\*H фактич. Ордината | ni, округленная частота |
|
| 4 | 0 | -11 | -1,84 | 0,0707 | 11,79728 | 12 |
| 8 | 29 | -7 | -1,17 | 0,2012 | 33,57302 | 34 |
| 12 | 67 | -3 | -0,50 | 0,3521 | 58,75278 | 59 |
| 16 | 46 | 1 | 0,16 | 0,3939 | 65,72769 | 66 |
| 20 | 58 | 5 | 0,83 | 0,2827 | 47,17243 | 48 |
| 24 | 31 | 9 | 1,50 | 0,1295 | 21,60888 | 22 |
| 28 | 15 | 13 | 2,17 | 0,0379 | 6,324142 | 7 |
| 32 | 4 | 17 | 2,83 | 0,0073 | 1,218106 | 2 |
| ∑ | 250 |   |   |   | 246,17 | 250 |

Н=166,86; N=250; Хср=15,03; G=5,99

Рисунок 3 – Полигон ряда распределения (N=250)

 **Вывод.** Рассчитаны частоты кривой нормального распределения для первого, устойчивого (№6) и последнего ряда распределения. Все ряды асимметричны и в меньшей степени соответствует нормальному распределению.

 **Распределение частот по критерию Пирсона**

 По данным, анализируя форму распределения, обычно оценивают степень соответствия исходного эмпирического вариационного ряда теоретическому (модельному) распределению. Критерии, позволяющие дать вероятностную оценку величине расхождений, то есть гипотезу о соответствии выборочного ряда определённому закону распределения, называют критерием согласия.

 Таблица 4 – Сравнение первого ряда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | Частота | ni-n,i | (ni-n,i)2 | (ni-n,I)2/ n,i |
| эмперическая, ni | теоретическая, n,i |
| 4 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0,5 |
| 8 | 1 | 2 | -1 | 1 | 0,5 |
| 12 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 3 | 5 | -2 | 4 | 2 |
| 20 | 6 | 7 | -1 | 1 | 0,5 |
| 24 | 8 | 4 | 4 | 16 | 8 |
| 28 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 32 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ∑ | 25 | 25 |   |   | 11,5 |

 **Вывод.** Расхождения между эмпирическими и теоретическими (нормальными) частотами имеет существенное расхождение признаков, что не соответствует нормальному распределению, т.к. критическое значение (11,5) больше стандартного (11,1).

Таблица 5 – Сравнение шестого ряда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | Частота | ni-n,i | (ni-n,i)2 | (ni-n,I)2/ n,i |
| эмперическая, ni | теоретическая, n,i |
| 4 | 0 | 7 | -7 | 49 | 24,5 |
| 8 | 14 | 18 | -4 | 16 | 8 |
| 12 | 43 | 32 | 11 | 121 | 60,5 |
| 16 | 22 | 38 | -16 | 256 | 128 |
| 20 | 35 | 30 | 5 | 25 | 12,5 |
| 24 | 24 | 17 | 7 | 49 | 24,5 |
| 28 | 8 | 6 | 2 | 4 | 2 |
| 32 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| ∑ | 150 | 150 |   |   | 262 |

**Вывод.** Расхождения между эмпирическими и теоретическими (нормальными) частотами имеет существенное расхождение признаков, что не соответствует нормальному распределению, т.к. критическое значение (262) больше стандартного (11,1).

Таблица 6 – Сравнение последнего ряда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | Частота | ni-n,i | (ni-n,i)2 | (ni-n,I)2/ n,i |
| эмперическая, ni | теоретическая, n,i |
| 4 | 0 | 12 | -12 | 144 | 72 |
| 8 | 29 | 34 | -5 | 25 | 12,5 |
| 12 | 67 | 59 | 8 | 64 | 32 |
| 16 | 46 | 66 | -20 | 400 | 200 |
| 20 | 58 | 48 | 10 | 100 | 50 |
| 24 | 31 | 22 | 9 | 81 | 40,5 |
| 28 | 15 | 7 | 8 | 64 | 32 |
| 32 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| ∑ | 250 | 250 |   |   | 441 |

**Вывод.** Расхождения между эмпирическими и теоретическими (нормальными) частотами имеет существенное расхождение признаков, что не соответствует нормальному распределению, т.к. критическое значение (441) больше стандартного (11,1).

**Вычисление частот распределения Максвелла**

Кривая распределения эмпирических частот вариационного ряда существенно положительных чисел, обладающего умеренной асимметрией, может быть аппроксимирована распределением Максвелла. Кривая частот рассматриваемого типа распределения удобна тем, что строится по средствам уравнения, определённого всего одним параметром. Она достаточно гибка и может быть применена для выравнивания асимметричных распределений различных биологических признаков, величины которых изменяются по непрерывному типу.

Таблица 7 – Распределение ряда по Максвеллу для шестого (оптимального) ряда

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi | ni, шт | t2=(Xi/а)2 | Exp(-t2/2) | t2\*EXP^-t2(f) | f0=f\*H | n,=f0\*n | окр. |
|
| 4 | 0 | 0,1642 | 0,9212 | 0,1513 | 0,0489 | 7,3373 | 8 |
| 8 | 14 | 0,6568 | 0,7201 | 0,4729 | 0,1529 | 22,9420 | 23 |
| 12 | 43 | 1,4778 | 0,4776 | 0,7059 | 0,2283 | 34,2404 | 34 |
| 16 | 22 | 2,6272 | 0,2689 | 0,7063 | 0,2284 | 34,2634 | 34 |
| 20 | 35 | 4,1049 | 0,1284 | 0,5271 | 0,1705 | 25,5715 | 26 |
| 24 | 24 | 5,9111 | 0,0520 | 0,3077 | 0,0995 | 14,9249 | 15 |
| 28 | 8 | 8,0457 | 0,0179 | 0,1440 | 0,0466 | 6,9870 | 7 |
| 32 | 4 | 10,5086 | 0,0052 | 0,0549 | 0,0178 | 2,6635 | 3 |
| ∑ | 150 |   |   |   |   |   | 150 |

Хср=15,76; σ=6,38

1. Коэффициент вариации (V) распределения Максвелла являются величиной постоянной:

V= σ/Хср\*100%

V= 6,38/15,76\*100%=40,497

2. Параметр распределения:

а=Хср/2\*$√\frac{2}{π}$

а=15,76/2\*$√\frac{2}{3,14}$=9,871

 3. Среднее квадратическое отклонение распределения Максвелла

σ=а\*$\sqrt{3}-8\*π$

σ=9,871\*$\sqrt{3}-8\*3,14$=6,638

 4. Мода:

М0=а\*$√2$

М0=9,871\*$√2$=13,960

 5. Медиана:

Ме=1,538\*а

Ме=1,538\*9,871=15,182

 6. Величина наибольшей ординаты:

Н=d/а\*$\sqrt{2}\*π$

Н=4/9,871\*$\sqrt{2}\*3,14$=0,323

 Рисунок 4 – Полигон оптимального ряда распределения Максвелла

Таблица 8 – Сравнение оптимального ряда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | Частота | ni-n,i | (ni-n,i)2 | (ni-n,I)2/ n,i |
| эмперическая, ni | теоретическая, n,i |
| 4 | 0 | 8 | -8 | 64 | 32 |
| 8 | 14 | 23 | -9 | 81 | 40,5 |
| 12 | 43 | 34 | 9 | 81 | 40,5 |
| 16 | 22 | 34 | -12 | 144 | 72 |
| 20 | 35 | 26 | 9 | 81 | 40,5 |
| 24 | 24 | 15 | 9 | 81 | 40,5 |
| 28 | 8 | 7 | 1 | 1 | 0,5 |
| 32 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0,5 |
| ∑ | 150 | 150 |   |   | 267 |

 **Вывод.** Расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами распределения Максвелла имеет существенное расхождение, т.к. критическое значение (267) больше (11,1).

 **Вычисление частот распределения Рэлея**

 К числу типов распределения, определённых одним параметром, относится распределение Рэлея, которое пригодно для аппроксимации умеренно асимметричных вариационных рядов, составленных из значений принимающих только положительное значение.

 Таблица 9 – Распределение по Рэлею

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Хi | Число стволов, ni | Xi/a2 | Xi/a2\*e-(X2/2\*а2) | f0=f\*di | n,=f\*di\*n | Окр. |
| 4 | 0 | 0,025 | 0,024 | 0,096 | 14,437 | 16 |
| 8 | 14 | 0,051 | 0,041 | 0,165 | 24,806 | 25 |
| 12 | 43 | 0,076 | 0,048 | 0,193 | 28,889 | 30 |
| 16 | 22 | 0,101 | 0,045 | 0,180 | 27,025 | 28 |
| 20 | 35 | 0,127 | 0,036 | 0,143 | 21,419 | 22 |
| 24 | 24 | 0,152 | 0,025 | 0,098 | 14,728 | 15 |
| 28 | 8 | 0,177 | 0,015 | 0,059 | 8,898 | 9 |
| 32 | 4 | 0,202 | 0,008 | 0,032 | 4,759 | 5 |
| ∑ | 150 |  |  | 0,966 | 144,961 | 150 |

Хср=15,76

 1. Основной параметр определяется по формуле:

 а2=2\*Хср2/$π$

 а2=2\*(15,76)2/3,14=158,03

 2. Мода:

 М0=$√а$

 М0=$√$158,03=12,57

 3. Дисперсия:

 $σ$2=а2\*(2-$π$/2)

 $σ$2=158,03\*(2-3,14/2)=67,79

 4. Среднее квадратическое отклонение:

 $σ$=$√σ$2

 $σ$=$√$67,79=8,23

Рисунок 5 – Полигон оптимального ряда распределения Рэлея

Таблица 10 – Сравнение оптимального ряда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | Частота | ni-n,i | (ni-n,i)2 | (ni-n,I)2/ n,i |
| эмперическая, ni | теоретическая, n,i |
| 4 | 0 | 16 | -16 | 256 | 128 |
| 8 | 14 | 25 | -11 | 121 | 60,5 |
| 12 | 43 | 30 | 13 | 169 | 84,5 |
| 16 | 22 | 28 | -6 | 36 | 18 |
| 20 | 35 | 22 | 13 | 169 | 84,5 |
| 24 | 24 | 15 | 9 | 81 | 40,5 |
| 28 | 8 | 9 | -1 | 1 | 0,5 |
| 32 | 4 | 5 | -1 | 1 | 0,5 |
| ∑ | 150 | 150 |  |  | 417 |

**Вывод.** Поскольку критическое значение (417) больше стандартного (11,1), то различия эмпирического и теоретического рядов существенные, то есть эмпирическое распределение не соответствует распределению Рэлею.

**Вычисление частот по показательному распределению**

По данному типу распределения выравнивают эмпирический ряд, частот которого представлены с резко выраженной правосторонней асимметрией, а средняя арифметическая величина соответствует по своему значению стандартному отклонению.

Таблица 11– Теоретические частоты показательного распределения

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Граница классов | Хi | ni, шт | Нижняя граница Хв | а\*Хв | е^-a\*XB |   | n, | Окр. |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   | 0 | 1 |   |   |   |
| 0-2 | 0 | 0 | 2,1 | 0,1333 | 0,8752 | 0,1248 | 17,9682 | 20 |
| 2,1-6 | 4 | 0 | 6,1 | 0,3871 | 0,6790 | 0,1962 | 28,2568 | 30 |
| 6,1-10 | 8 | 14 | 10,1 | 0,6410 | 0,5268 | 0,1522 | 21,9215 | 24 |
| 10,1-14 | 12 | 43 | 14,1 | 0,8949 | 0,4087 | 0,1181 | 17,0066 | 19 |
| 14,1-18 | 16 | 22 | 18,1 | 1,1487 | 0,3170 | 0,0916 | 13,1937 | 15 |
| 18,1-22 | 20 | 35 | 22,1 | 1,4026 | 0,2460 | 0,0711 | 10,2356 | 12 |
| 22,1-26 | 24 | 24 | 26,1 | 1,6565 | 0,1908 | 0,0551 | 7,9407 | 10 |
| 26,1-30 | 28 | 8 | 30,1 | 1,9103 | 0,1480 | 0,0428 | 6,1604 | 8 |
| 30,1-34 | 32 | 4 | 34,1 | 2,1642 | 0,1148 | 0,0332 | 4,7792 | 6 |
| ∑ | 144 | 150 |   |   |   | 0,8852 | 127,4628 | 144 |

 Хср=15,76

а=1/Хср

 а=1/15,76=0,064

1. Дисперсия:

$σ$2=1/а2

 $σ$2=1/0,0642=244,14

1. Медиана:

Ме=0,693\*Хср

 Ме=0,693\*15,76=10,92

 3. Стандартное отклонение:

 $σ$2=1/а

 $σ$2=1/0,064=15,625

 4. Коэффициент вариации:

 V= $σ$/Хср\*100%

 V=6,381/15,76\*100%=0,41%

 Рисунок 6 – Полигон оптимального ряда показательного распределения

 Таблица 12 – Сравнение ряда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi, см | Частота | ni-n,i | (ni-n,i)2 | (ni-n,I)2/ n,i |
| эмперическая, ni | теоретическая, n,i |
| 0 | 0 | 20 | -20 | 400 | 200 |
| 4 | 0 | 30 | -30 | 900 | 450 |
| 8 | 14 | 24 | -10 | 100 | 50 |
| 12 | 43 | 19 | 24 | 576 | 288 |
| 16 | 22 | 15 | 7 | 49 | 24,5 |
| 20 | 35 | 12 | 23 | 529 | 264,5 |
| 24 | 24 | 10 | 14 | 196 | 98 |
| 28 | 8 | 8 | 0 | 0 | 0 |
| 32 | 4 | 6 | -2 | 4 | 2 |
| ∑ | 150 | 144 |   |   | 1377 |

 **Вывод.** Расхождение между эмпирическими и теоретическими рядами существенное, то есть эмпирическое распределение не соответствует показательному распределению, критическое значение (1377) больше стандартного (11,1).

 Список использованных источников

 1. Никитин К. Е., Швиденко А. З. Методы и техника обработки лесоводственной информации [Текст] / К. Е. Никитин, А. З. Швиденко. – М.: Лесная промышленность, 1978, - 270 с.

 2. Свалов Н. Н. «Лесная промышленность» / Н. Н. Свалов / Учебное пособие для вузов. М., 1997. – 176 с.

 3. Фарбер С. К. Методологические основы моделирования древостоев: Учебное пособие [Текст] / С. К. Фарбер, В. А. Соколов. – Красноярск: КрасГУ., Институт леса им. Сукачева, СтбГТУ, 2005. – 72 с.