**Оглавление**

Введение…………………….………………………………………………3

I. Теоретическая часть

История развития комплексных чисел………………………………...4

Свойства комплексных чисел…………………………………………..7

Действия с комплексными числами……………………………..…......8

Основная теорема алгебры……………………………………………..12

Геометрическое изображение комплексных чисел…………………..13

Комплексные числа и координатная плоскость……………………...14

Модуль комплексного числа……………………………………....…...17

Аргумент комплексного числа…………………………………………18

Перевод z =a+bi из алгебраической формы в тригонометрическую...19

Перевод z=a+bi из тригонометрической формы в алгебраическую…21

Перемножение комплексных чисел в тригонометрической форме.....22

Возведение комплексного числа в степень……………………………22

II. Практическая часть

Задачи, в решении которых используются комплексные числа……..23

       Список использованной литературы……………………………….....32

**Введение.**

В элементарной математике изучаются действительные числа. С начала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2,… n,… В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечения корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. Квадратные корни из отрицательных чисел стали употреблять в математике и назвали их мнимыми числами – тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым числам дал Гаусс, который назвал их комплексными числами, дал геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный корень.

**Гипотеза:** Существует ли такое множество чисел, в котором выполняется операция извлечения корня из отрицательного числа.

**Целью исследовательской работы** является изучение истории появления комплексных чисел, свойств действий над комплексными числами, алгоритмов решения уравнений с комплексным переменным и решение геометрических задач с помощью геометрической интерпретации комплексных чисел.

**Задачи:**

Проследить историю развития понятия числа и их путь формально-логического расширения понятия числа.

Изучить происхождение понятия комплексного числа и его развития, свойства комплексных чисел, различных действий, производимых с ними (таких как сложение, вычитание, возведение в степень, извлечение корня; графическое изображение, перевод из алгебраической формы в тригонометрическую и наоборот).

Рассмотреть различные виды уравнений, решаемых в комплексных числах.

Рассмотреть применение комплексных чисел в геометрии.

**I. Теоретическая часть**

**1.История развития комплексных чисел.**

Введение комплексных чисел было связано с открытием решения кубического уравнения, т.е. ещё в 16 веке.

И до этого открытия при решении квадратного уравнения x2+q=px приходилось сталкиваться со случаем, когда требовалось извлечь квадратный корень из (p/2)2 - q,где величина (p/2)2 была меньше, чем q. Но в таком случае заключали, что уравнение не имеет решений. О введении новых (комплексных) чисел в это время (когда даже отрицательные числа считались “ложными”) не могло быть и мысли. Но при решении кубического уравнения по правилу Тартальи оказалось, что без действий над мнимыми числами нельзя получить действительный корень.

Теория комплексных чисел развивалась медленно: ещё в 18 веке крупнейшие математики мира спорили о том, как находить логарифмы комплексных чисел. Хотя с помощью комплексных чисел удалось получить много важных фактов, относящихся к действительным числам, но самое существование комплексных чисел многим казалось сомнительным. Исчерпывающие правила действий с комплексными числами дал и в 18 веке русский академик Эйлер – один из величайших математиков всех времён и народов. На рубеже 18 и 19 веков было указано Весселем (Дания) и Арганом (Франция) геометрическое изображение комплексных чисел. Но на работы Весселя и Аргана не обратили внимания, и лишь в 1831 г. когда тот же способ был развит великим математиком Гауссом (Германия), он стал всеобщим достоянием.

Об истории развития комплексного числа можно говорить очень долго.

Рассмотрим «плюсы» и «минусы» основных числовых систем, они указаны в таблице. Мы видим, что по мере продвижения по строкам этой таблицы от N к R список во втором столбце расширяется как раз за счет сужения списка в третьем столбце. Осталась частично допустимая операция извлечения корней из произвольных чисел, которая, как мы увидим, станет допустимой в системе комплексных чисел.

Из вышесказанного следует, что минимальными условиями, которым должны удовлетворять комплексные числа, являются следующие условия:

С1) *Существует комплексное число, квадрат которого равен –1.*

С2) *Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.*

С3) *Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законом арифметических действий.*

**Определение1**. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

https://lh3.googleusercontent.com/OK50bZOZGDg8vjdd-QfZstwY1CwI_jC-g1Wxs1DNYlnBPEDxJ2QOvYpcWlVWfL7bn9w4m-RSAw-MG2g4C8pUv17R976r1fUy8oRlOoPG416zrYGj_vI

В записи https://lh3.googleusercontent.com/MUr6AXk9PqoNRWf0aBeN3OSysc_lyHJHon008L1rZGJWzfVhiDk3S8IwkWNBwGK2Rfy7QPCFpcFlBDgriBxEiQNJZJKgTFAHnmJY1PL6LtqYk2F0Yn8https://lh3.googleusercontent.com/FTU3f44in0Ooq6NaHqozCZ7GjoXngytKxNY7Oah6uouo3tTYVW4u0xLQVYvtUu8qPZg4BAYY-ZRpDi5J6_dZ3Kgp-fSGc2lkFN7G7kBakFt4bMDwNGo число https://lh5.googleusercontent.com/rGMSBdQ8VtrmbRJc_ALIa-7RRp2gxPNqn5UNxwvvK8Ei1PxOvgu9UsRcX-v-xdK0FR5LmHfGrRuePfXeEgdzEhIRa8X8UIB85lf_wicJC7B6npf0m38https://lh3.googleusercontent.com/MYvTgutL4N9fCJ68eV6ORIBQBlqZRrCgGxXryPDato5ewlA58BLqyyDChpL1IJbVGXOrOLoNys6w6oxSaYI8CTFpt1iJ-NWKHzKSGdFmNNJ5PS6FFd0 называют действительной частью комплексного числа z, а число b- мнимой частью комплексного числа z

**Определение 2**. Два комплексных числа называют **равными**, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

https://lh5.googleusercontent.com/x50RBnOL3r47xcdtEvx90wdRB7vtHtLYFYYI1EjAnsovmrevLEHqN8ZV6IbVgonDS6nCwXsLyi9aa-cMGTttSwl3S7p0rqCGE8v4lqB4m0eIOD-hO1c

Между комплексным числом https://lh3.googleusercontent.com/m7OAJvAVrsJFrmpot3p0nRz48dZ-WHCUgHQBu7l0Y-RISh1LbddWdSbNKgblBXNmIfqqud1SeFY6cqw6Q2y9Odc4qPUMzJ7DEaINLQs28TEHsneBEXYhttps://lh4.googleusercontent.com/qmEEIBABPHVW7Q77-nfDveYR4LIkHUzu4wcKfiUOa2XBTj_IVST8ARbYSiuSzkDUTZnpg0x5z_hc-6A0odYePuvqhTut95y85BkO4r6RMBmM_LgxhYM и действительным числом https://lh6.googleusercontent.com/pHaqJmgAW6E1H_ezR0r08zQm6MPQV7-ZFycDCBaYRSFRu5Bswlwt52dicB9_J7_IHHkBPdlIBqYMvm9IX6a5qd6zCO-11AKxAe8ySpqDSmG2FV0yCV0https://lh3.googleusercontent.com/qdws_seq5RM51bbS7CXmhKWIGfw4VFSVmEAXjgLLQY1akn9H-kUdPzh2s-MnQWuZFqbDAD2r1RIlg9w9xLGW94VvFZ2WAtNiCaTxie3-3n9vaa8IgII обычно не делают никакой разницы, подобно тому, как, например, говорят о числе 3 на оси абсцисс, хотя, формально, полагалось бы говорить о точке (3; 0). Действительные числа – это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Значит, выполняется соотношение https://lh4.googleusercontent.com/wmC48xpa1q93_rlaNnQuIKaYSANyOdP5kQzDg2azdiKb3fn78euSguib210_-I_MrBHI6v8HXwpVVEOVe02TSst7xwzdZNBhoKs970pdhrMngAOb1_0https://lh5.googleusercontent.com/002YqhtFmUc9XhFL2rkR1i5V4DK3p5erj0voiOv1dH-HShYmOtQJHJOiGn0Mgw4uSZogTlkXckc-P1ob-lGYp-BN2V9tsdk5Hz4JhfVxOPuvsnSpSj8 .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Числовая система | Допустимые алгебраические операции | Частично допустимые алгебраические операции |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Натуральные числа, N | Сложение, умножение | Вычитание, деление. Извлечение корней.  Например, можно вычислить 7 – 5, 48:4, ; но, с другой стороны, уравнения  3*х+*2000 = 1001, 4*х* = 3, *х*2 = 10  не имеют корней в N |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Целые числа, Z | Сложение, *вычитание*, умножение | Деление. Извлечение корней.  Например, можно вычислить (–48) : (–3), ; но, с другой стороны, уравнения  5*х* –3 = 2004,  *х*2=999  не имеют корней в Z |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рациональные числа, Q | Сложение, вычитание, умножение, *деление* | Извлечение корней из неотрицательных чисел.  Например, можно вычислить ; но, с другой стороны, уравнения *х*2 = 2,  3*х*4–5 = 2003  не имеют корней в Q |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Действительные числа, R | Сложение, вычитание, умножение, деление, *извлечение корней из неотрицательных чисел* | Извлечение корней из произвольных чисел.  Например, можно вычислить  но, с другой стороны, уравнения  *х*2 = –1,  2*х*4+5*х*2+ 3= 0  не имеют корней в R |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Комплексные числа, C | Все операции |  |

**2. Свойства комплексных чисел.**

Если b = 0, то комплексное число a + bi становится действительным числом, равным а. Таким образом, действительные числа представляют собой частный случай комплексных чисел.

Если а=0, а b ≠ 0, то комплексное число bi называют чисто мнимым числом.

Комплексные числа а1 + b1i и a2+b2i называют равными, если а1 = а2и b1 = b2.

В частности, a + bi равно нулю тогда и только тогда, когда а=0 и b = 0.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются, т.е. комплексные числа по величине не сравниваются.

Два комплексных числа a + bi и a - bi, отличающиеся только знаками при мнимой части, называются комплексно сопряжёнными или просто сопряжёнными; их произведение равно a2 + b2. Знаком сопряжения является черта над комплексным числом, означающая изменение знака при мнимой части. Это свойство комплексных чисел используется для преобразования дробей (убирается иррациональность в знаменателе дроби). z=a+bi и z= a–bi  – сопряженные.

Пример:

(2+3i)/(1+2i) = ((2+3i)(1-2i))/((1+2i)(1-2i))=(2+3i-4i-6i2)/(1-4i2)= (8-i)/5 = 1.6 – 0.2i

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел (исключая деление на 0) в результате произведения действий дают комплексные числа. (т. е. множество комплексных чисел замкнуто по этим операциям).

**3.Действия с комплексными числами.**

Арифметические операции над комплексными числами выполняются в соответствии с условием С3

**1).Сложение комплексных чисел**

**Определение.**  Суммой комплексных чисел a + bi и a’ + b’i называют комплексное число     (a + a’) + (b + b’)i.

 Это определение подсказывается правилами действий с обычными многочленами.

Пример 1. (-3 + 5i) + (4 – 8i) = 1 - 3i

 Пример 2. (2 + 0i) + (7 + 0i) = 9 + 0i. Так как запись 2 + 0i означает то же, что и 2 и т. д., то наполненное действие согласуется с обычной арифметикой (2 + 7=9).

Пример 3. (0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i, т. е. 2i + 5i = 7i

Пример 4.  (-2 + 3i) + ( - 2 – 3i) = - 4

 В примере 4 сумма двух комплексных чисел равна действительному числу. Два комплексных числа a+bi и a-bi называются сопряженными. Сумма сопряженных комплексных чисел равна действительному числу.

 Замечание. Теперь, когда действие сложения определено, мы имеем право рассматривать комплексное число a + bi как сумму чисел a и bi. Так, число 2 и число 5i в сумме дают число 2 + 5i.

**2).Вычитание комплексных чисел.**

**Определение.** Разностью комплексных чисел a + bi (уменьшаемое) и a’ + b’i (вычитаемое) называется комплексное число (a – a’) + (b – b’)i.

Пример 1. (-5 + 2i) – (3 – 5i) = -8 + 7i

Пример 2. (3 + 2i) – (-3 + 2i) = 6 + 0i = 6

**3).Умножение комплексных чисел**.

 Определение умножения комплексных чисел устанавливается с таким расчетом, чтобы 1) числа a + bi и a’ + b’i можно было перемножать, как алгебраические двучлены, и чтобы 2) число i обладало свойством i2= - 1. В силу требования 1) произведение (a + bi)(a’ + b’i) должно равняться  aa’ + (ab’ + ba’)i + bb’i2, а в силу требования 2) это выражение должно равняться (aa’ – bb’) + (ab’ + ba’)i. В соответствии с этим устанавливается следующее определение.

**Определение**.  Произведением комплексных чисел a + bi и a’ + b’i называется комплексное число

 (aa’ – bb’) + (ab’ + ba’)i.

Замечание. Равенство i2 = -1 до установленного правила умножения комплексных чисел носило характер требования. Теперь оно вытекает из определения. Ведь запись i2, т. е. i.i, равнозначна записи (0 + 1.i)(0 + 1.i). Здесь a = 0, b = 1, a’ = 0, b’ = 1 Имеем aa’ – bb’ = -1, ab’ + ba’ = 0, так что произведение есть       –1 + 0i, т. е. –1.

На практике нет нужды пользоваться формулой произведения. Можно перемножить данные числа, как двучлены, а затем положить, что i2 = -1.

Пример 1. (1 – 2i)(3 + 2i) = 3 – 6i + 2i – 4i2 = 3 – 6i + 2i + 4 = 7 – 4i.

Пример 2. (a + bi)(a – bi) = a2 + b2

Пример 2 показывает, что произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное и притом положительное число.

**4).Деление комплексных чисел.**

 В соответствии с определением деления действительных чисел устанавливается следующее определение.

**Определение**. Разделить комплексное число a + bi на комплексное число a’ + b’i – значит найти такое число x + yi, которое, будучи помножено на делитель, даст делимое.

 Если делитель не равен нулю, то деление всегда возможно, и частное единственно ( доказательство смотри в замечании 2). На практике частное удобнее всего находить следующим образом.

**Пример 1.** Найти частное (7 – 4i):(3 + 2i).

**Решение:**

 Записав дробь (7 – 4i)/(3 + 2i), расширяем её ( умножаем числитель и знаменатель) на число 3 – 2i, сопряженное с 3 + 2i.  Получим:

((7 – 4i)(3 - 2i))/((3 + 2i)(3 – 2i)) = (13 – 26i)/13 = 1 – 2i.

 Пример 1 предыдущего параграфа даёт проверку.

**Пример 2.** (-2 +5i)/(-3 –4i) = ((-2 + 5i)(-3 + 4i))/((-3 – 4i)( -3 + 4i)) = (-14 –23i)/25 = -0,56 – 0.92i.

 Поступая, как в примерах 1 и 2,  найдем общую формулу:

Чтобы доказать, что правая часть действительно является частным, достаточно помножить её на a’ + b’. Получим a + bi.

Примем за определение деления формулу:

Эту формулу можно вывести ещё следующим образом. Согласно определению, мы должны иметь: (a’ + b’i)(x + yi)  = a + bi. Значит, должны удовлетворяться следующие два уравнения:

a’x – b’y = a; b’x + a’y = b.

Эта система имеет единственное решение:

если a’/b’ = -b’/a’, т. е. если a’2+ b’2 = 0.

 Остается рассмотреть случай a’2 + b’2 = 0. Он возможен лишь тогда, когда

a’ = 0 и b’ = 0, т. е. когда делитель a’ + b’i равен нулю. Если при этом и делимое

a + bi равно нулю, то частное не определено. Если же делимое не равно нулю, то частное не существует (говорят, что оно равно бесконечности).

**5).Операция перехода к сопряжённому числу.**

Если у комплексного числа сохранить действительному часть и поменять знак и мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному. Если данное комплексное  обозначено буквой https://lh6.googleusercontent.com/LK4SV8J61E7Lwry17A4LQkpqFx84FYG30s8P6vZdTRyQBObeMlbZlBsB_ygvWtoeooYLzPUisJYeE9UROAnDkpAH0fS-HE7ZAp_cv5iSzyQf1VA9uqEhttps://lh3.googleusercontent.com/W_Hmx6Gz5XPtVmZgcjJxN81S4-y7IudeyAkQfEBckIy-D1LeOkf1y7K7A-0a46SyEXXw27SlPE8uVQ0zNjXsOQO0DyWeN-hQBoSxRPtrf0ZWxj2KupA, то сопряженное число обозначают https://lh5.googleusercontent.com/U3-eLsTb7vjl6-BApJaJp393rDsGRg714Q_5DLIRk1mwRuwXW8K5Gzkb2r78SZwHH3ZuRtysIZz-7fmRDjEk3-6ZIX4PfP1SomYoNIM4iJy9Xm_ZniQhttps://lh6.googleusercontent.com/d4Z2aB3vF_dqmn334M-0GtBLK8UM9blMH6gvWVMkqi5qSfLr4Yxq29wLlamKHRJNPtoFmjva2DrezVIanMhIYFdKETmIPY6qOFbGfLBUZ6LqIDXe8go.

*Свойство 1*. Если https://lh4.googleusercontent.com/OXvzrwz3lcJmr8wNmUsHipnudMJi10GB-Or-45GhSOYIkA6rUh6kXSHxYj43GSlYpw0hVx-tQxyk8UMApQIFqI8gtVKwnnBkmlc5oou7gPwpZrcC72whttps://lh6.googleusercontent.com/TqaYm_AN-F0LOt7pO1lMABya5k6pra5er3MQ_wfivaWk82Wo0rLEhC1LhV9FV3V8iZCsnxKu1opD5YUHNZJX9Eq0RSV8UTAv-1oF2FZ-EEpP9Xev1rc, то https://lh4.googleusercontent.com/B9qiftFX2I3IeXzRqRiuhwju3DSd-8JcFX_enbyc4kFDGV4_fkFxm0NxQkLrdHiSL1-59TKt_bZojGPclZzBMOM1EckjWFOlLDiVwdNtKpAlmtu3Dt4https://lh4.googleusercontent.com/hsYj0PdCyla3vnCN0VPkPiYF9RnA9C-s23ay0Lx_cqBrYe7Zfpp2fG0L4G1FArVOc-pV8Rz6F6nGk4BxMOIot9XCgW15np28DCgzT-GbioV67_BMCiI.

*Свойство 2.* https://lh3.googleusercontent.com/nyy3ABVracyD24cBBxW_4Ncbi-uIUabBKEDKKN4J3m4wOL7hlSNKwKVehbjf0I3Vk9ZFP0OXni0ejiywWbul7vQeejelUbSdxk3XveJRsxlXD3TjnRQhttps://lh3.googleusercontent.com/9lU6VZ_oNgEZ35Ei6m8_dqHmz97f5Axi_FmKwKW_Y6-63OK8qWpxYmQEcKg2iqjF42zyZc586dekf4kUWSXEC2lkFFF76ScGQz0siGzG-BHgbqjqX-E, т. Е. число сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

*Свойство 3*.https://lh4.googleusercontent.com/De2SqHkBct8K0lD21H8v__w-85AfCx_wdyiHk_X1wCI_CRFdb4QGx5_rw4rmGkfbo3PDUQo8l9eKV6qL_Qe33yijA8-EpIgfnzK1TKrZzAm90CEvk_khttps://lh5.googleusercontent.com/YCa3Q-i5TKAgPN3iADDO7UwvjxMZGBGDt2RUkfLHX5brCrtRhYfbL_GN2hBpqaFwJ4iew99x2ZEesyMsZDfrnTGFyb2Kk2mHoLN3jajjB9rXMYcJyTk, т. Е. число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

*Свойство 4*.https://lh3.googleusercontent.com/9BWsTHUe5mGPhg_bqOjJyehZ0dv-Bn2SLvo236ofao9PwP2UCTWIPCaPZsMlSUbkCyHGp8QsgA1WNI3dB6VRCE1T9WRGxmIKPHGHN-aVYP5TZQOIbSwhttps://lh4.googleusercontent.com/orOE0d-RY837jnaMUUH_fkNV6wkgg1Zq9fThkUY4RNiPbQYMbD8ZAYU_r3BjKmnguCwVlrQrz9il2VHrjYHS-vfT2syDfMBUCJPzNnm2hQqqU9AJE3o, т. Е. число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

*Свойство 5*. https://lh5.googleusercontent.com/OrqO8xo61RjJ36L_cp9V2BMZ3GOhMy925R1lY_88XFpD4WfEOIPJFunW-T42lxnwbgwYrjW_rsOiTWlzsBgS22Q69Rx99NnKpyJujnDFSnhXm5IAuw0https://lh5.googleusercontent.com/p6DbG3So0K49hLO1Rvp5z6FexkFc8P2hMli42Vx71m3Aq2SPq8Y8YxNGAKLqhNlKt8mFdOWE1cr7-hULB5WdyReSNaqnv5LlnPevzyHPNhQAb6yNZDM

*Свойство 6*. https://lh5.googleusercontent.com/vnqg7urj3g6kz5oyj3n5YncZH2krEJzp13joXTQY-NP35hXO2A3QSQ0MhnFy-7XKXzAUQP6T85yNOmhLqNYqQZ0m9nyptVy0FbFQ__tCpIhsryMHA80https://lh5.googleusercontent.com/itgo97RWNEEnOrqO60Wi9zS1z74DcMAuTkN4WDRJHvTapQccgYuDlKHEec0l_tgHGdNcFLS_yGoOdqjnbLSX7CoDn5cs0cfg1vvAPTZT79NQpV7cFig

**6).Возведение в степень.**

Полагают

где n – натуральное число.

Для z ≠ 0 полагают z0 = 1, z-n = 1/zn

При возведении комплексного числа в степень с целым показателем справедливы следующие свойства:

zp .zq = zp+q,

(zp)q = zpq, zp/zq = zp-q,

(z1 . z2)p = zp1 . zp2,

(z1/z2)p = z1p/z2p, где p и q – целые.

Найдём степени числа i.

По определению i0 = 1, i1 =i; далее, известно, что i2 = -1. Поэтому i3 = i2 .  i = -i,

i4 = i3 .  i = 1, i5 = i4 .  i = i.

Вообще i4n = 1, i4n+1 = i, i4n+2 = -1, i4n+3 = -i (n – число натуральное).

**7).Извлечение корня.**

Определение: *корнем n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w,*

*w =, что wn = z (n≥2 – натуральное).*

*Таким образом, извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень.*

**Теорема.**Если , то

*Пример 1*. Вычислить:

Здесь z=i=0+1 По теореме получаем:

**Пример 2.**Извлечём, например, квадратный корень из действительного отрицательного числа (-a2) и покажем, что = +ai или = -ai.  В частности, = +-i.

Полагая = х + yi, имеем (x + yi)2 = -a2 или (x2 – y2) + 2xyi = -a2. Отсюда получаем систему двух уравнений

решив которую, найдём, что x = 0, y = +-a

(случай у = 0 невозможен, так как при этом х2 = -а2, что неверно для действительных чисел). Поэтому= +-ai.

Доказано, что корень всегда существует и имеет ровно n различных значений, если z≠0. Очевидно, = 0.

**4. Основная теорема алгебры.**

Комплексные числа обладают алгебраической замкнутостью – всякое алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами имеет корни. Например, уравнение х2 – 4х + 13 = 0 имеет отрицательный дискриминант (D =

=16-52=-36 < 0), но корни этого уравнения будут х1= 2-3i и х2 = 2+3i, т.е. квадратное уравнение из множества комплексных чисел имеет два комплексных числа корнями уравнения.

А. Жирар и Р. Декарт сформулировали основную теорему алгебры – всякое алгебраическое уравнение имеет столько корней, какова его степень. А доказал эту теорему немецкий математик К. Гаусс.

|  |  |
| --- | --- |
| https://lh4.googleusercontent.com/GCeBq-03pGmA0OYyXPvHRD64lqQU1i_EA8HpebcXeVdU5YGTWGBaadykMfmFEdhhnwWhTAO1YGmmflzRoZ3hOUpfdZs3I-0MkvI15T3Jkqg-QnYNsh8 | Карл – Фридрих Гаусс (1777 – 1855). Знаменитый немецкий математик. Гаусс – человек с универсальными математическими способностями; им затрагивались почти все главные отрасли чистой и прикладной математики. Гаусс создал множество математических трудов, среди которых: «О протяжении эллипсоидов», «Мемуары по теории биквадратичных вычетов, в которых впервые введено в теорию чисел понятие о целых комплексных числах вида а + bi» и многие другие. |

**5.Геометрическое изображение комплексных чисел.**

Комплексным числам соответствуют простые геометрические образы на двумерной плоскости. В этом случае ось x называют действительной осью, ось y– мнимой осью, а саму плоскость (xy)– плоскостью комплексных чисел, или z-плоскостью. Комплексное число изображают либо точкой с координатами (a, b), либо вектором с началом в центре координат (0, 0) и концом в точке с координатами (a, b) (см. Рисунок).

**6.Комплексные числа и координатная плоскость.**

При переходе к геометрической модели множества С комплексных чисел требуется, как минимум, ещё одно измерение: ведь все точки прямой уже «заняты» действительными числами. Оказывается, геометрической моделью множества C является координатная плоскость. Каждому комплексному числу можно естественным образом поставить в соответствие точку координатной плоскости. Тогда любому комплексному числу соответствует единственная точка на координатной плоскости, и наоборот, каждая точка плоскости является «изображением» единственного комплексного числа.

В случае с комплексными числами, в соответствие с числовой прямой, отождествление с точками координатной плоскости. Например, фраза: «число z1 лежит в первой координатной четверти» - просто означает, что и действительная и мнимая части комплексного числа https://lh3.googleusercontent.com/YO3sTC5CDzpX6ZmrPrHkl-R_M43sFAJPiqvN59epQinqp8IBSRCpjtuIJHEN-9C-WR20L8IPEC1MfwLBsgNk7IVET4OeJzM8FsuddDsKLkj0dsUh_70https://lh5.googleusercontent.com/rQ2p0bZsyewpOUJF6R4uX1-6hXIHkGhEZbmG8nds6suLgF_ArMrkC8KXAQICva1UIxSCWwfhdiwAo4ffUOQfhb_tAXoFfShxb2Gph9cJOu0wJTW--uU положительны. Слова «z**2** лежит на оси ординат» являются переводом на геометрический язык того факта, что число z2 чисто мнимое, а «…комплексное число z3расположены выше биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей…» – показывают, что мы имеем дело с комплексным число https://lh6.googleusercontent.com/rA7_Yyjk15u30zWdldNOMvn-sKpnRgwPX1XCo_VyMpX5x780Le3dDo4Z3eTmu4yzRNT3LbgfIEdYu2XDNl86HosMYDjsuVKOM1J1cReJrH_xUa0olzQhttps://lh6.googleusercontent.com/imyXq_xTh_QlhKnLjCqn4-r0vG66419UW9DWnWNiU2Zr9x6W6YgyxekzfNn3GNW7qwJ9bn_Q4H8vwAzIzVT_JOnnWhvKYS2GIfdbJiLFv-AKP6UIgfU, у которого мнимая часть больше действительной части.

Иногда приведенные правила для сложения, вычитания комплексных чисел и умножения комплексных чисел на действительные числам объединяют таким образом: во множество комплексных чисел операции сложения, вычитания и умножения вычитания и умножения на действительные числа производятся покоординатно. Подчеркнем что сама эта формулировка предполагает операции уже не с самими комплексными числами, а с их геометрическими, векторными представлениями.

На координатной плоскости отмечены комплексные числа: https://lh4.googleusercontent.com/Gb-x7Es3WyxZjpy2Vu94C6aD5P9WxuGjtdUXzlEngLCA5miMqo6g0zxHwzoBPxEsZbVvBbsg6YggMZLf7LNcPgJ-tyUVQ0mLtWf2Cwr8mS1g9BIbMPUhttps://lh5.googleusercontent.com/vcYPANgvN5_eNS6GVi_XyNoG7OQ9WpEVHHpHtvHYUPXsWLRfRXt2_oad8lu7T2UirMqG7mgaADd_Rdig8lkQu0lXUhEBHplC0wXGzuyMFCD1GA0NrtI

На координатной плоскости отмечены некоторые действительные и чисто мнимые числа: 0, 5, -3,5, i, -2i.

**Пример.**Для комплексных чисел https://lh5.googleusercontent.com/Bq6IhalzEtnkTl5RaG5N48gxSrs2RLAtxjG9UbV2N_w-DXbA8B25RalXl527pLLhaNeBJVUUsT_nL-Zqsy_R7esyw_ipXJ3ydB6iVrXytD3KDNaW-cYhttps://lh3.googleusercontent.com/8V31FYD3lhlqBnhM35keK3LOfq-IY3SOpoERmcuNfA_vsGjmOcvv89IMVBts1S4sr3OEEw6Hk0ODyh89OVYtoBDmCo8rCsBmcc3WON5X_5mqQwLNGKU изобразить на координатной плоскости числа: https://lh3.googleusercontent.com/NUYX9vraF5aTkZamOEh9rrNcsxgLmPElGbI1m3Siw6QSx3PsDKLpVPILSbuUiCrrN4_lObalNx3h77fDWSdrslAlzFb3ladI19rKs-oJgcVTFnXqEPshttps://lh6.googleusercontent.com/goPT78ce9x3TPy_mCKHnnjzha_NPQ1-AJP_00Dwo_AivHOHBTjLPdweBbyQtZy_mUziCHzPt_wBpE-j2kyudUkanviGqsmWTDhSzNkUnKZp4Pm-azT4.

Решение:

Иногда приведенные правила для сложения, вычитания комплексных чисел и умножения комплексных чисел на действительные числа объединяют таким образом: во множестве комплексных чисел операции сложения, вычитания и умножения на действительные числа производятся покоординатно. Подчеркнем, что сама формулировка предполагает операции уже не с самими комплексными числами, а с их геометрическими, векторными представлениям.

**7.Модуль комплексного числа.**

**Модулем**комплексного числа https://lh5.googleusercontent.com/QlwxlTz_WR3Xv1rSM4kq2w9HthWdrpikBNEcioo8EP2WThx8bU_dk6gfslX-TX3XpLsZWGfll9Ok_PkFuFXGYCJmUzipyIME2e2xAtmWf5ZnzynIxX8https://lh4.googleusercontent.com/DKo79VUMsKY2E-jI7iuKu_6Utzg-rZST4xb5Pl7Digyw2NJIV0RFtDaa_vWDPhgYXT48s5fjty6A5m0vEINP-L74scnmaDSyiRfUCKKKt0ev9LPSbB4 называют число https://lh5.googleusercontent.com/wIYjSyG3AdCqVWUW0lqWTTnertLIxpTiQzRR7hZ9RmGd824k6d522dIANdWb2crFNsyqltcCvW7xJrve3keu1r_qoO4SpYRq_dk_Par91wtrxV4lLfAhttps://lh4.googleusercontent.com/eJIAf_-ivoDraWJGPv1Yaxr1k_SRKmap2oDCQlrSQB6lnSkOu0Mc2ZgQ1PQ7CwnRDdv7Hzzwf1uir88pzmbySE6GAc4MjAAXUaJmO32AvuwYKA0lWlw. Обозначение: https://lh6.googleusercontent.com/ik991qQJ2sT5qAuzB37_Q_Im7ipbExp9AqM96A73bX6lybcA4pN1qNhYN_7yaO6keyDyMFYRy3cunj4MesTEu7NGcL1gRFGDrN_h8RjaRPvWGiZmN5Qhttps://lh4.googleusercontent.com/dl19rLmgpvJGDsGYcjrfXBoxjWmX-_lQx2L8QOT-Daj7WBwJ6bh43ZfPUEt-NyBrPkXPUOI6xW1rkHjDQZY7KMihQy5CQX_7C40vhvzJrdxwWNuCr-U.

Пример найти модуль комплексного числа:

Решение.

https://lh4.googleusercontent.com/mds8C8gOPZcw0a2wKVvsVNCLM8Yq0QFkUCh7bCH74x6S11-IiQWcDLbOZH9AKJ97MyVZjSvLhlk01VvlIac-nn1L1hl4yLdvrIeVa9IzaCcWpLfONhs

https://lh6.googleusercontent.com/WNgjrPDzf0t3WQKO2G9rPr_fuT5HSitRxrouB-lgyGsfVv_Hvrn0zZ6zZqgvqQTXgVVCHTQyFUQfcK0RUAWBSURy_G8s_1yJn3UtqkggxeoOxYYuqE4

https://lh3.googleusercontent.com/syoGRU7-3E5dRXv2ZywGkr-jWe2mS6OkDklyygTriTsnvMBuNLRTVW1im34FQrYiX0-Dy3FHE-eTntunREsmpN_e3i0qRrP1Xr_dx57eoINIylJ3Dsg

**Теорема. *Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел:***

https://lh4.googleusercontent.com/mT6J_oYMaXyY37-oGzalfJPOEyH80ZbmdkVn0H5QwADKyxUaz-7kkCwOvD62DymqMy4hJB7z_hWG7NaVnoWrI37E7ldeiOuhlQz8_yC5gpiCfk2rzh4

*Свойства модуля:*

https://lh5.googleusercontent.com/dtuPf0WHTrsWSJUSUsIGup-SbEpCJItTIJs44QmRznlzswMGUJaDSUnEOoOvunNekPGeWpPcv2Kw75dnlpSdSpkhFLFQcyO55KwE4ov6yfrBTJiaKbkhttps://lh3.googleusercontent.com/qvrTp5KcJ7L3L_LREZwZFU_6UDlbA4PFiwexAGccOwP2iRjgvorRjbKJY89C5OuMOeWjxvRHwOE4YSnrq-3KgWkxUwca3CJjSWhM0SVjRrXTPc3ZxHQ

https://lh6.googleusercontent.com/5MyqsVRboEZ78Q08XxU2pZmH3yTxEsUUMDK06DRalrJAH4jJCoAmZsNAknwOgCKApQJ8i6FX38WGaEW9bUrqoSgcqx9DWY78Ds2V1NUo7OGrIVBs7Tghttps://lh4.googleusercontent.com/sXc9ADP8JhUZw5XGzvxiWXrJ2G4yt0JY5Aauw5M-fELIBsbxUaMP-d5pEA-Sfom7Gohd0yJV8FTrJvmgQVhi22a7McgiVNmHmsxE2nr22MVOpm3QVZM

https://lh4.googleusercontent.com/wR2uA6HBBruDUOA5riCdvC1GtfLxnH73VjGSrE-Y9dF2sRrsGUYnCNql-ZaFw2K4gu1-JB1nps1woIY32VEpRk2sRa-axR6ROYrEty7muuiBRp4j7e8https://lh4.googleusercontent.com/FnN5QDQxfYXqUTOVDSBotbZ9InfHutsSp4Q3tg7Apog9JJ1UXSXs168j89_j90ad6aTG_u91S6rZt518xCo3MQin44FotoIF6VcQVwH_iRxPbhhARo0

https://lh3.googleusercontent.com/R5e39Z8IsljbFGbSMXsGPXo55ai9XmMAxvUiIfvGaSIIXZbPWsZLdWQVYnw5UotKmCwBfmaFX41dB5XhqOu8ARTZcdOSIK7zvsKj0L-ZYMPyVajSRGQhttps://lh5.googleusercontent.com/oDnZaNNiIEmrLJNUql_pDaHDCfDcathfMp1mL4y-ITRYT77MPu1hWbzSS96rpPSh4ohWlbLdVTn6g6vEGfbCV3Vn-Pies2gdYq3hpFOVk1HG5IDw0tk

https://lh3.googleusercontent.com/zZ2-f0EzbIFbbQXwSEaLw4BZFlfVezcfgS4kg3uhljvS5nQsBp-kzE_f08Rh-PSG-xjp1mRYAkqIMcWgL1s6hn03O7iPyglqXAqfwjFe4PZHgUEdOowhttps://lh3.googleusercontent.com/zlIbXFfAdRlp4mlOAtSyyIBsVO_GEneCkk0MKnRON3ZD4aSYvnlZ0ChV60OyUGCEe-VkKRzyx8bmDh6zF6QavwyvVg8rVmT-pySwKbgKfXGmysxMJ3w

https://lh4.googleusercontent.com/e_cPwWedRu0qSLRQ_iWMPSenapcHglareYPuI9KmTwJX3mK2qGI9wWzPWhnMTIG8F78_E9qn3-S9cNhN88uf3aqRzqyRo9gweVB24zoRACHTNJAYTMEhttps://lh4.googleusercontent.com/1_zEKCsFHrR9DVoR47PDc2utxY1n5mcGJHt30UtB1ET0krS0PPuCtGX6HXbLWNSLlK_Hz0NCO2fdM7BqSb9mgJhwRVUAWqqnNQnE8AlA074pn1kO1jU

https://lh6.googleusercontent.com/BqQG0gxlP9L1Ufft_D7iX-8Q3226AVI8jo17J4dMqE9kgY58B9jhqLpNK_LGW2_hiGihLHN7s4ILpAiwoJeQ4ZBEdtKIj_WG43y3DKR7sDELmpnN9A8https://lh6.googleusercontent.com/PpVOZbZ-m9ja8x_spzSbr-5IYK0JU_Yvw1Lgaw_p7Ugs_sER5gIz9ZVqHeEflXbkpIBZ1dCqVjlAKeCpkSgC6HMQCYAWRxexxKemghT-Yj7ow5o-pK4

 Длина вектора, изображающего комплексное число, называется модулем этого комплексного числа. Модуль всякого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число. Модуль комплексного числа a + bi обозначается

| a + bi |, а также буквой r.

r = | a + bi | = a2 + b2

 Модуль действительного числа совпадает с его абсолютным значением. Сопряжённые комплексные числа a + bi u a – bi имеют один и тот же модуль.

**8.Аргумент комплексного числа**

***Аргументом отличного от нуля  комплексного числа z***называют действительное число α такое, что:

Обозначение: **arg z**

Геометрически аргумент комплексного числа z можно истолковать так: это угол, заключенный в пределах , который вектор z образует с положительным направлением оси абсцисс.

**9.Перевод   z =** **a + bi** **из алгебраической формы в тригонометрическую**.

**Теорема.** ***Если комплексное число z лежит на числовой окружности, то***https://lh6.googleusercontent.com/iurkIw3ys927TDTeYFNsK4FreoM3gQfgrLWC0hMJ72YkE8Ws2S2U5uVBVMi0FRUG-SsWDEmhe8U6Nv8VcMUYhdvUN6w9LCQmlsWVNoubiQ_nbsOv-aghttps://lh3.googleusercontent.com/t7nqhb0IY6j0Q1lyPOs8e3KCkFZMCTwfeiOHLMsQWJiG6ZjwDzQ3bEFNaQKA7K_o4DRaYNFa9Iobf4h2kPNPk1XMrr3Xys1y_aqwRcuhU-QmaJHrwO8***для некоторого действительного числа***https://lh3.googleusercontent.com/0RmgGd-69leZAoaVOWUX6GI5pDqKly4qx2OJFygam9plJ_S2U5MjL_Ca3Y0NAIOz0rSc1GSauSn_7fxNHMyhps-zjQEvJcOv_WgHjD38mtP6IJ1kjc4https://lh6.googleusercontent.com/I9HuCyb4opRvP0Cc5eVH84P64F_zl4e7hvhhOt8wYLyjog0g8GFGnJUcI_hr410ibzPvj9tRRPzR4bvG210DQFOFYq3grGmtxz4HN7MkXYGJkMw9jUI***; если***https://lh3.googleusercontent.com/Iinm77j2AyoKr-c5n4oU4w8qowEXas2zP0M114gCt3yjg6v2x_Yi6UGtaWEA0I2gFfB1YGhRaUIP8b-LjUuQSAqkWe4ipiAklexjnyVYVaQRE_2sf70https://lh5.googleusercontent.com/a_bgtErnQkXHpLANguRsBsBcAUcfcoKelRdr687aFJ47ZEaadFju30Uy0CnSS9c9lad0ZPa_oCbTg1JBGzk_YMrDxBoUMTVlnLXKNJyDx5mSmb8LgIM***, то z лежит на числовой окружности.***

Введём обозначение r = |z | =

tgφ = b/a. Отсюда мы можем найти сам угол φ

z = r(cosφ + i sinφ). Перевод очевиден.

**Пример**. z = 1 + . i

a = 1    b =

|z| =

|z| =  =  =    = 2;

tgφ = b/a;

tgφ = /1 =;  φ = 600;

z = |z|(cosφ + i sinφ);

z = 2(cos600+ i sin600);

1 + = 2(cos600+ i sin600).

**Пример.** Записать данное комплексное число в стандартной тригонометрической форме https://lh4.googleusercontent.com/djRQA6FICygqkn0KEXKHZwAR_bqCsoDpRUqGglGgf7rytb2SBvjgmgV5HiP5JxGoFL0gz2hP4m2V7U7FxdPSH__npHrDOchowfNdIqm3YGSWjb-9CrYhttps://lh5.googleusercontent.com/pDxf7yP-owTscDkifSAHeH914ygZ-Z5MNUM7VMHSvKKs39QNNxMHRAfHKJSyksFMmG1o2tltiDt0JvVN7zfwjEpA4b56I8ikhIZHbZH0HcpneOXdbZE

*Решение*. Найдём модуль числа https://lh6.googleusercontent.com/E-MDJWi7OCJWqf-NC7k3ktzn93MeKPM7U0grlriJdvPVvq2gEDcWRzo9m2hscvSwJ--QNl4SV6fLwsqilfGUauIhOAziDuC3hfYyNqtvHVxsvjggPd4https://lh5.googleusercontent.com/kgWM6_Bg-z0TGDd2zK1YrcrO9Z15MIZ1nBLSCFIg3pQ80MbQuZ631H0FsBAQmaioSKJJAcXD0JR9vmnnPUeXzkDVx5RihbOMaetS96jcFYF_X9L9OKw. Получим:

https://lh5.googleusercontent.com/opkyD3I70Xj1MfV_8pur6Mso7tEvL3yAXmaSKT0NXf_2ioW8rqkDjQGJXH7NfVGxIfmMVKpCjh9lOJU08iKyCmLBgYKM8kUcqjIWHongEl7vQ4Ju0K0

Значит, https://lh6.googleusercontent.com/hFMwtUopKR4yv1PrSzswJZ0uzBoflBbkqCBndlRbF03yinO6vDj73MrXaOUjO-1kHLHq-nhmN2tgVjsQQtqE4bz9B1JAD3mY5JYuTPEjQbtSkLLBQhAhttps://lh3.googleusercontent.com/6nsO7sgkGI3Rlco3F3yX9g3nssW6_jVo1HltcMEwwYOjiIDbYltFw1btla0pP4EYa1iuTGp-yOTYKz9CQ_o3EYm2ooI5svR6pwifrUCE86v3LtHVdyU. Осталось вычислить аргумент https://lh3.googleusercontent.com/8tzg3lj_FqTbGedkPMAS-fhYcm1HrFXLXlhfeGk54AE4z1Vr_DDefvvLZrNsS0elmw6fTPkdvva7ao22kWNF7kHMuT3dDojt_PmNvX4nH9xUoNtLd_ohttps://lh5.googleusercontent.com/WkUZaB2aeT30aqErTJ_R5nqO5qKPBOQSnXZeBN-L-esXHpkGqHn473A425Sv6Ie9ztK6GnOnh6TsHkpQdhsoiqQNhdS_xZW2iG83s06-NZc1JgxX-AQ:

https://lh4.googleusercontent.com/T5SFujTtfSv0I_pQpVLoa72RpRBz6-Dx1naQ9tVramYbZDCixVW-87HNw-I4IBzFOjdli-fTVjsCvcJUuX4NB5dNuHne04OD5D9EZulF2wwS2CZ6UpQ

Ясно что https://lh4.googleusercontent.com/P8_jGQbWOwuKni3DWoQkE6kubFyJGa8Guu9pJzo8rn3pwdJ5uyMPYW1tUyOjS7Ygetx8T4bay3ovVJy0AuC3ojzL1w6b3VrgoNIPBNjH-Kaz1EUKQR4https://lh4.googleusercontent.com/duJqP2gNBAK7epTY_L4wSL-bx0Jj95ufX3zQcGXs_pG2V1h0E7eDYUpJF1NRIGZSB7L0m0mjdj9Ps6AC_5znix2eEmLkrjpKFtj3ZKhQIqwX60jJiVI.

Итак, https://lh3.googleusercontent.com/wXolaKwDm4dEwbfg7uDtqrbCvTZvybrVxiXM1n4wS5Xut5_qskUeAA1mxLpd1oWf_5XTvSGHMN97gJBv_Rgn773SwHDOm1DgNAGePqXHrehA-TmQCfMhttps://lh4.googleusercontent.com/_jxO3MvLvZQV7ePSFFWSC3oBVRuWO4WyiOPG7TO_AxvZj2eZWz9aZALAC2XfgAg-8VDbqheL1nlMKGjbhJylTMsl7AcNjfMuxfq0TRVTZccSt65imhQ

**Пример**. Выразить https://lh5.googleusercontent.com/Fs-XVTQJXM7hy5xuWyB3inytAtwg2POecHgHAA9M62xKrTZarHGL0rKS9PSSX_iLFtl9Naw8pQjAK61IOiyTZ14vq2ycT47NODHHfH_kkP2vFmZc5fIhttps://lh5.googleusercontent.com/wjwWTzyFvo6k7PR1f5_FmVrI9idmpmKdKTECWjb8RzfCaykO6Fe08nDBSJw_Rj1kzJ42tfWhMtjwb9rQM8DUPG64K2O4XS5OOAjL27CJ97w6C16YsLM через https://lh5.googleusercontent.com/GarHnOrusUVFALQwM-uWSpBt6Oy93LpLXA609zlSaKMZlqfZlPEwfGJw2tNKnaNhj1-NO-_-7Irs-L2HIafRfDBBZYt0GK2WRTmahXhxDPFyy4gLBqohttps://lh5.googleusercontent.com/hPMVGmPqJFJHWTsiXuHX_0BIWBgfxClL-eRkN-gRr87rB9YhWKfTKxrIIQlF7ZwrId1BqqGB5Ibc7R75xnXJjs4T4vuvd_0x4ZhuvZPM6CvELNV0U2Q и https://lh4.googleusercontent.com/kX3edg_NgueRezp6YEWohFx-FWR5Bp3kcZkVXMPAMaom4IrY7cQHEHOjXmSPgeiaR7Flwoq8ASIVGj_4diJ942-0-chm3btL5xxwlPjr6zDVJU2jIFshttps://lh5.googleusercontent.com/2aOpReAVav04xWKDQzI1oqcGi3Y8yKFbrFOIAypQ4Vz7FRhAH9d3xidr5FINU_o2epfEEds7Wt2yp-RKBhzObK_wNemtHbwpHTpWTnKbo3cGb6AQ5n0 через https://lh6.googleusercontent.com/baaDClopxNF13olWtqCOR2D3SiFVOoilq6VlyEJKdpXG074ke6RoQQ3uAC9D6qrw9KIsa5oMU5xsTxl55IiSVOJyY0G6_MtaF6IdnYQcMNri8czsNPwhttps://lh3.googleusercontent.com/D2uAyn8McijeLft2U-v9KUWOR6FzoL-zulv8USJp9-SQwEyl8pZiNJBrQ5I7JQj3Kxi73gFCkADh7ERxezSVmAq9iiKrMnmlgeggRXmMO9ZVFLOIhy8.

*Решение.* Запишем формулу Муавра при https://lh6.googleusercontent.com/H3Uacw6ywSEfAmXB5Vi0FlKQf-UQW42gRdYkG9YOhx9TxnUdEJ41sPnv8TzIiIcIgqZEyYLg1ElZL7GTmIBgevnBKCpiF30aVC6LEA2pnAgcjI1EjFQhttps://lh4.googleusercontent.com/c77U1QFPIUt98xLksNi8Ljd7uBoJFW3BnPSTbF7F5qTmBAZGrNY2WlWLjVrYHq4P733ILFVDcJZHwW1Kxhwjf9mIPPoWoiruTp6Yud7PYNkJBV8hdn4:

https://lh3.googleusercontent.com/VrFvM13GwOQdsiA_ak_ZVSMuv6UQ3VtDlCNDKO7kWz5gKfFu3yPrZgdlQHdLRNnEz9Y9pA4ePg9ALZeCzNsSH8NEQtZDRsSK70BsiZ9zlzxHb8IeJYkhttps://lh3.googleusercontent.com/9ltfYyawyEMeOMNKhQaovkQOGJDzOHA1zaDeRZRAqhjdsFLGeivoUf_dgMHbjCd311GQByVmPLdqQeTPtnCVZvwH0GHtESM8podmQrGLpqeOCltP_sY.

Левую часть раскроем по формуле куба суммы:

https://lh4.googleusercontent.com/LXnlGMgySXepbkmyawPQEHxr4RB1glHlPM9drU3-XtcFEkIQ8HU8fImmF7ukrPNxHlYknKE6p6jJsOSElpz346Z1y4fS-ZNwLKZbpcWpuoDQWQRdcsA

Итак,

https://lh4.googleusercontent.com/Tq-KhiGIHeu_9gCn865JgZcl5YUnNotPuzYnenLzHOXxbJ8JxE_H2WIs2OpWF-RiIb__vBRW_C3SNylSrIVuoho77CxnGJO_H1Qn7SQVx43AxOdqi6w

Используя условия равенства комплексных чисел, получаем:

1)https://lh4.googleusercontent.com/7ZMtjXhKbIVHqGXPL3BMOBGZDbhIul_HR6ipacb8bFfv6d-SWf9ii2SYilBYgkiExDb0IPSraAskKExrisOPYGMrE1hvBP9aWaDjQXUdbNY7LpTPm_Ehttps://lh4.googleusercontent.com/i2--1b8qLwm2jJgGHTAPquxhyOGLl2f_qgGadPDiiiQ31y3uZ30npKDqkHLOSTfd1TNDXWmBzQOvvGN_Audd1PYCq2ajfw3N9gp5PHeCkDWurXIm3pM

https://lh3.googleusercontent.com/U1OYPuEFQVh1YBnUxUPHgkvDY-kUmKe1JdenxhtS-97NQ_vG_ASpHmpFvLt7-J-SHiQ6dI0_Gd8e7e2e7dKyafubV7mEJRI9kDb_gukOwMcHHXK9wXg

https://lh4.googleusercontent.com/qSXcRZYqfTfV7scTY_y3L5TFWYmPrIIyOL9OcXNvQYPC1TVGpGiOPqQHLmLUHTmY9MJuBQqAkxZLSSDY2V751oO28RiXW8ZFvt0JV24yrZ2jt9-YslA

https://lh6.googleusercontent.com/LjePuIWPVhw4rX4EghJ2t8RAuw4XT9vKFwS5-yarVSt_qb4DSqhqMWOcPJ6zOHS1V-epyQYxA2MrPh7y1B1sSKkokuNscT2Wif0Cu03DHA7zGtqqbwI

https://lh5.googleusercontent.com/E46MJOzA2N3wEgW1GTXjb6x2Qcr41HtIoTP3l-UILTWn__tjtBUkwzcgJ2Vd0sW4jw_5Pt-l9ha2SHHqqjIYxw60hqmNjtzBpBabkJNC8dMUmYQD-sg

https://lh6.googleusercontent.com/HLDc3F8Brk8eguohfIoiR95tt-EyfVpvk00zA8b_-ry5ywXmXvB1vhF8fDpA0EKd4JTtsHPSRU9EwYFfarDq55NSnH5j6Pj00BHEd4ixIO1zveMf0Zg

Итак,

https://lh3.googleusercontent.com/DM0FR5JRbFND5l1KKZGCRBppmUeA9p9wSQ6E32LJw4MixiNoWv0Vpi7rpJXOElM-oh6SCE2Y22rDp6U-GOnLNqDaZ--pUeMsQQ0xYsSCeuBFjTlX1Rc

https://lh3.googleusercontent.com/katmKyPj9aWstAFYpYBgkXbEnJSOVKLGL2rq3WfWqIoY0ywy977vJu3qtXlgKbFgVnrPmBce6Cmmn1L28Fsxs1ANzZgmM0XhCXQCMGEyNeyjWeqoO70

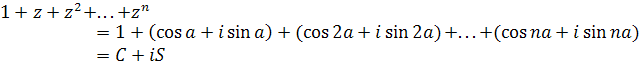
**Пример**. Найти сумму

https://lh4.googleusercontent.com/gFBh6VCbaKEx9ou-bsUAPYC-GTjw0vtunE7YTyWS2zavsWseOQN4fgfFg1t2H6fo7h3YcnxacIMx4dQ-yCLk32ZVjGe73HqT2AajgDcC7tuMOwd1SAk

*Решение*. Для комплексного числа https://lh3.googleusercontent.com/HeZr-E5Q5XPmObCKK_dyn_07mikTYvYPYPNnkV1y-s1kCW_BewKuCuMFHPFcYOjEUtG_qnp5scZ9ykp9dwlpvAtb0KC2zn40DXNLt5z3NPG8mn4Hh90https://lh3.googleusercontent.com/enuLqbPxSshTzmpHaV6IMCx_QkxIhUQbM6wjt_wb02JkEH7dfg9S6MEyMSPvwGTGKmnGBZFYMTqYkNfMcZKzdt37uNUENSujM7y4W6I89BkcJhrPGug рассмотрим геометрическую прогрессию 1, z, z2, z3, …со знаменателем z.Запишем формулу для суммы первых https://lh6.googleusercontent.com/j5rLbJy9q9w_E8gz6liWerdV6WwUIM_pFVtQbr7Vk5TGOutx3n09fz31Hu-gs1TtAa37umWvkiuM7fF-cN3KDNqrqAmwOh68RalupUG1bpe1GSVB8NUhttps://lh4.googleusercontent.com/joctNbMRmsML-iaVxETBM8YUKx3hxSWjQC5yLI_v37OrdENDILmlMy8X7TwrI5NvVyWUYqjJjNq0H81Hglgm4Qd5snzCFMO2umJb8oxfgJFjNqmr1Es членов этой прогрессии:

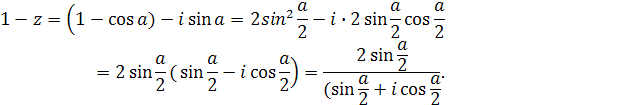
https://lh6.googleusercontent.com/PjvJrXzbSHcSQuQbEXjdfP_ucgbHobrTOYGXRYz6t_r4IadERB-StzB85IuF9jt4cUpnBI4KrSh9Rm2PLfLXrWnCmKW4-qYdX2r70ahvqrqiGzoH15Qhttps://lh5.googleusercontent.com/cc5t-fYpciIjbjyRC5hZV8UlFYCjK7iS3kIcp-7TdnHAIORpzOGgD_pS6HS8yhbujTHlY9QTEw_eBqRTHG06wBoopmWGpMdBhRf4_IH4hT0DlQXYpHQ*.*

К каждому слагаемому левой части применим формулу Муавра:

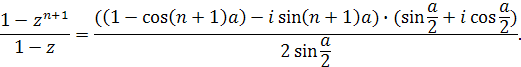


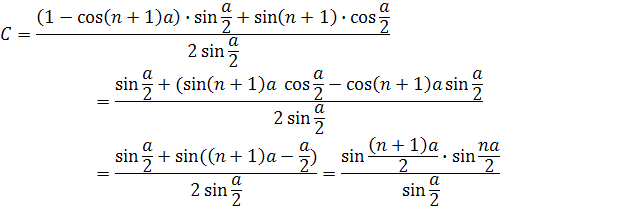
Осталось найти действительную и мнимую части дроби https://lh6.googleusercontent.com/22o-MHcKZI44U30em7AFFurpZMtM_T2VZVB0pJJi9AiOj48fqVU7JfVV4ap82FG6DhJIqMzdG-YDSRB3zYVI0w4qFMSFhdz0S88gK02fleBEDyoDUXghttps://lh3.googleusercontent.com/KEMG49JEVfRoIVH-85vaKJJP-AEKKFjpMwgEgiEj-jl3sPgwG5XT9yDvxLeVACiLvck8mTVJOhMBC0jKq1yDSoYlG5K2i2PkDrGQmU1bYrHCmiB3ZWs,

А затем воспользоваться тем, что действительная часть равна С, а мнимая часть равна S.Отсюда и получается нужные формулы для С и S. Сначала преобразуем знаменатель:

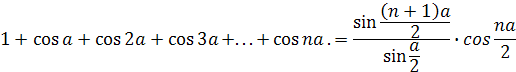


Значит,





В итоге получаем:



**10.Перевод z =a+bi из тригонометрической формы в алгебраическую.**

z = r (cosφ + i sinφ)

Раскроем скобки: z = r. cosφ + i. r.sinφ

z = a + bi. Перевод очевиден

**Пример.**  z = 5 (cos1200 + i.sin1200)

Решение. z = 5 (-1/2) + i.5. (/2);

z = -5/2 +5/2.i

Геометрически сумма комплексных чисел равна суммарному вектору, слагаемыми которого служат векторы суммируемых комплексных чисел. (Сложение векторов производятся по правилам, изложенным в геометрии.) Разность векторов комплексных чисел тоже равна вектору разности.

**11.Перемножение комплексных чисел в тригонометрической форме.**

В этом разделе используются следующие тригонометрические формулы:

sin (α + β) = sin α . cos β + cos α .  sin β;

sin (α - β) = sin α .  cos β - cos α .  sin β;

cos (α + β) = cos α . cos β - sin α .  sin β;

cos (α - β) = cos α . cos β + sin α .  sin β.

Запишем два комплексных числа в тригонометрической форме:

z1= r1(cosφ1 + i. sinφ1) и z2 = r2(cosφ2 + i. sinφ2)

Вычислим их произведение в тригонометрической форме по правилам перемножения комплексных чисел:

z1.z2 = r1(cosφ1 + i.sinφ1). r2(cosφ2 + i.sinφ2) = r1.r2(cosφ1 + i.sinφ1) (cosφ2 + i.sinφ2) = =r1.r2(cosφ1.cosφ2 + i.cosφ1.sinφ2 + i.sinφ1.cosφ2 + i2. sinφ1.sinφ2) = r1.r2((cosφ1. cosφ2-sinφ1.sinφ2) + i(sinφ1.cosφ2 + sinφ2.cosφ1)) = r1.r2[cos(φ1+ φ2) + i.sin(φ1+ φ2)]

Применяя это правило, получаем формулу для возведения комплексного числа в любую степень: [r(cosφ + i.sinφ)]n = rn(cos.n.φ + i.sin.n.φ)

**12. Возведение комплексного числа в степень.**

Формула Муавра.

(ρ(cosα+i sinα))n = ρn(cos nα+i sin nα), nN

*Пример*: (cos 15°+i sin 15°)6=cos(15°·6)+i sin (15°·6)=cos 90°+i sin 90°=i

*Следствие 1. (ρ(cosα+i sinα))n=ρn(cos na+i sin na),nZ*

*Следствие 2.(cos α+i sin α)n=cos na+i sin na,nZ*

*Следствие 3.*Если модуль комплексного числа z равен единице, а его аргумент равен 2π/m (m=3,4,5…), то множество степеней z0,z1,z2,z3,…zm-1 образует на комплексной плоскости множество вершин правильного m-угольника, вписанного в единичную окружность.