**Оглавление**

Введение…………………….………………………………………………3

I. Теоретическая часть

История развития комплексных чисел………………………………...4

Свойства комплексных чисел…………………………………………..7

Действия с комплексными числами……………………………..…......8

Основная теорема алгебры……………………………………………..12

Геометрическое изображение комплексных чисел…………………..13

Комплексные числа и координатная плоскость……………………...14

Модуль комплексного числа……………………………………....…...17

Аргумент комплексного числа…………………………………………18

Перевод z =a+bi из алгебраической формы в тригонометрическую...19

Перевод z=a+bi из тригонометрической формы в алгебраическую…21

Перемножение комплексных чисел в тригонометрической форме.....22

Возведение комплексного числа в степень……………………………22

II. Практическая часть

Задачи, в решении которых используются комплексные числа……..23

       Список использованной литературы……………………………….....32

**Введение.**

В элементарной математике изучаются действительные числа. С начала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2,… n,… В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечения корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. Квадратные корни из отрицательных чисел стали употреблять в математике и назвали их мнимыми числами – тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым числам дал Гаусс, который назвал их комплексными числами, дал геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный корень.

**Гипотеза:** Существует ли такое множество чисел, в котором выполняется операция извлечения корня из отрицательного числа.

**Целью исследовательской работы** является изучение истории появления комплексных чисел, свойств действий над комплексными числами, алгоритмов решения уравнений с комплексным переменным и решение геометрических задач с помощью геометрической интерпретации комплексных чисел.

**Задачи:**

Проследить историю развития понятия числа и их путь формально-логического расширения понятия числа.

Изучить происхождение понятия комплексного числа и его развития, свойства комплексных чисел, различных действий, производимых с ними (таких как сложение, вычитание, возведение в степень, извлечение корня; графическое изображение, перевод из алгебраической формы в тригонометрическую и наоборот).

Рассмотреть различные виды уравнений, решаемых в комплексных числах.

Рассмотреть применение комплексных чисел в геометрии.

**I. Теоретическая часть**

**1.История развития комплексных чисел.**

Введение комплексных чисел было связано с открытием решения кубического уравнения, т.е. ещё в 16 веке.

И до этого открытия при решении квадратного уравнения x2+q=px приходилось сталкиваться со случаем, когда требовалось извлечь квадратный корень из (p/2)2 - q,где величина (p/2)2 была меньше, чем q. Но в таком случае заключали, что уравнение не имеет решений. О введении новых (комплексных) чисел в это время (когда даже отрицательные числа считались “ложными”) не могло быть и мысли. Но при решении кубического уравнения по правилу Тартальи оказалось, что без действий над мнимыми числами нельзя получить действительный корень.

Теория комплексных чисел развивалась медленно: ещё в 18 веке крупнейшие математики мира спорили о том, как находить логарифмы комплексных чисел. Хотя с помощью комплексных чисел удалось получить много важных фактов, относящихся к действительным числам, но самое существование комплексных чисел многим казалось сомнительным. Исчерпывающие правила действий с комплексными числами дал и в 18 веке русский академик Эйлер – один из величайших математиков всех времён и народов. На рубеже 18 и 19 веков было указано Весселем (Дания) и Арганом (Франция) геометрическое изображение комплексных чисел. Но на работы Весселя и Аргана не обратили внимания, и лишь в 1831 г. когда тот же способ был развит великим математиком Гауссом (Германия), он стал всеобщим достоянием.

Об истории развития комплексного числа можно говорить очень долго.

Рассмотрим «плюсы» и «минусы» основных числовых систем, они указаны в таблице. Мы видим, что по мере продвижения по строкам этой таблицы от N к R список во втором столбце расширяется как раз за счет сужения списка в третьем столбце. Осталась частично допустимая операция извлечения корней из произвольных чисел, которая, как мы увидим, станет допустимой в системе комплексных чисел.

Из вышесказанного следует, что минимальными условиями, которым должны удовлетворять комплексные числа, являются следующие условия:

С1) *Существует комплексное число, квадрат которого равен –1.*

С2) *Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.*

С3) *Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законом арифметических действий.*

**Определение1**. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.



В записи  число  называют действительной частью комплексного числа z, а число b- мнимой частью комплексного числа z

**Определение 2**. Два комплексных числа называют **равными**, если равны их действительные части и равны их мнимые части:



Между комплексным числом  и действительным числом  обычно не делают никакой разницы, подобно тому, как, например, говорят о числе 3 на оси абсцисс, хотя, формально, полагалось бы говорить о точке (3; 0). Действительные числа – это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Значит, выполняется соотношение  .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Числовая система | Допустимые алгебраические операции | Частично допустимые алгебраические операции |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Натуральные числа, N | Сложение, умножение | Вычитание, деление. Извлечение корней.Например, можно вычислить 7 – 5, 48:4, ; но, с другой стороны, уравнения3*х+*2000 = 1001, 4*х* = 3, *х*2 = 10не имеют корней в N |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Целые числа, Z | Сложение, *вычитание*, умножение | Деление. Извлечение корней.Например, можно вычислить (–48) : (–3), ; но, с другой стороны, уравнения5*х* –3 = 2004,*х*2=999не имеют корней в Z |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рациональные числа, Q | Сложение, вычитание, умножение, *деление* | Извлечение корней из неотрицательных чисел.Например, можно вычислить ; но, с другой стороны, уравнения *х*2 = 2,3*х*4–5 = 2003не имеют корней в Q |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Действительные числа, R | Сложение, вычитание, умножение, деление, *извлечение корней из неотрицательных чисел* | Извлечение корней из произвольных чисел.Например, можно вычислить  но, с другой стороны, уравнения*х*2 = –1,2*х*4+5*х*2+ 3= 0не имеют корней в R |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Комплексные числа, C | Все операции |  |

**2. Свойства комплексных чисел.**

Если b = 0, то комплексное число a + bi становится действительным числом, равным а. Таким образом, действительные числа представляют собой частный случай комплексных чисел.

Если а=0, а b ≠ 0, то комплексное число bi называют чисто мнимым числом.

Комплексные числа а1 + b1i и a2+b2i называют равными, если а1 = а2и b1 = b2.

В частности, a + bi равно нулю тогда и только тогда, когда а=0 и b = 0.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются, т.е. комплексные числа по величине не сравниваются.

Два комплексных числа a + bi и a - bi, отличающиеся только знаками при мнимой части, называются комплексно сопряжёнными или просто сопряжёнными; их произведение равно a2 + b2. Знаком сопряжения является черта над комплексным числом, означающая изменение знака при мнимой части. Это свойство комплексных чисел используется для преобразования дробей (убирается иррациональность в знаменателе дроби). z=a+bi и z= a–bi  – сопряженные.

Пример:

(2+3i)/(1+2i) = ((2+3i)(1-2i))/((1+2i)(1-2i))=(2+3i-4i-6i2)/(1-4i2)= (8-i)/5 = 1.6 – 0.2i

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел (исключая деление на 0) в результате произведения действий дают комплексные числа. (т. е. множество комплексных чисел замкнуто по этим операциям).

**3.Действия с комплексными числами.**

Арифметические операции над комплексными числами выполняются в соответствии с условием С3

**1).Сложение комплексных чисел**

**Определение.**  Суммой комплексных чисел a + bi и a’ + b’i называют комплексное число     (a + a’) + (b + b’)i.

 Это определение подсказывается правилами действий с обычными многочленами.

Пример 1. (-3 + 5i) + (4 – 8i) = 1 - 3i

 Пример 2. (2 + 0i) + (7 + 0i) = 9 + 0i. Так как запись 2 + 0i означает то же, что и 2 и т. д., то наполненное действие согласуется с обычной арифметикой (2 + 7=9).

Пример 3. (0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i, т. е. 2i + 5i = 7i

Пример 4.  (-2 + 3i) + ( - 2 – 3i) = - 4

 В примере 4 сумма двух комплексных чисел равна действительному числу. Два комплексных числа a+bi и a-bi называются сопряженными. Сумма сопряженных комплексных чисел равна действительному числу.

 Замечание. Теперь, когда действие сложения определено, мы имеем право рассматривать комплексное число a + bi как сумму чисел a и bi. Так, число 2 и число 5i в сумме дают число 2 + 5i.

**2).Вычитание комплексных чисел.**

**Определение.** Разностью комплексных чисел a + bi (уменьшаемое) и a’ + b’i (вычитаемое) называется комплексное число (a – a’) + (b – b’)i.

Пример 1. (-5 + 2i) – (3 – 5i) = -8 + 7i

Пример 2. (3 + 2i) – (-3 + 2i) = 6 + 0i = 6

**3).Умножение комплексных чисел**.

 Определение умножения комплексных чисел устанавливается с таким расчетом, чтобы 1) числа a + bi и a’ + b’i можно было перемножать, как алгебраические двучлены, и чтобы 2) число i обладало свойством i2= - 1. В силу требования 1) произведение (a + bi)(a’ + b’i) должно равняться  aa’ + (ab’ + ba’)i + bb’i2, а в силу требования 2) это выражение должно равняться (aa’ – bb’) + (ab’ + ba’)i. В соответствии с этим устанавливается следующее определение.

**Определение**.  Произведением комплексных чисел a + bi и a’ + b’i называется комплексное число

 (aa’ – bb’) + (ab’ + ba’)i.

Замечание. Равенство i2 = -1 до установленного правила умножения комплексных чисел носило характер требования. Теперь оно вытекает из определения. Ведь запись i2, т. е. i.i, равнозначна записи (0 + 1.i)(0 + 1.i). Здесь a = 0, b = 1, a’ = 0, b’ = 1 Имеем aa’ – bb’ = -1, ab’ + ba’ = 0, так что произведение есть       –1 + 0i, т. е. –1.

На практике нет нужды пользоваться формулой произведения. Можно перемножить данные числа, как двучлены, а затем положить, что i2 = -1.

Пример 1. (1 – 2i)(3 + 2i) = 3 – 6i + 2i – 4i2 = 3 – 6i + 2i + 4 = 7 – 4i.

Пример 2. (a + bi)(a – bi) = a2 + b2

Пример 2 показывает, что произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное и притом положительное число.

**4).Деление комплексных чисел.**

 В соответствии с определением деления действительных чисел устанавливается следующее определение.

**Определение**. Разделить комплексное число a + bi на комплексное число a’ + b’i – значит найти такое число x + yi, которое, будучи помножено на делитель, даст делимое.

 Если делитель не равен нулю, то деление всегда возможно, и частное единственно ( доказательство смотри в замечании 2). На практике частное удобнее всего находить следующим образом.

 **Пример 1.** Найти частное (7 – 4i):(3 + 2i).

**Решение:**

 Записав дробь (7 – 4i)/(3 + 2i), расширяем её ( умножаем числитель и знаменатель) на число 3 – 2i, сопряженное с 3 + 2i.  Получим:

((7 – 4i)(3 - 2i))/((3 + 2i)(3 – 2i)) = (13 – 26i)/13 = 1 – 2i.

 Пример 1 предыдущего параграфа даёт проверку.

 **Пример 2.** (-2 +5i)/(-3 –4i) = ((-2 + 5i)(-3 + 4i))/((-3 – 4i)( -3 + 4i)) = (-14 –23i)/25 = -0,56 – 0.92i.

 Поступая, как в примерах 1 и 2,  найдем общую формулу:

Чтобы доказать, что правая часть действительно является частным, достаточно помножить её на a’ + b’. Получим a + bi.

Примем за определение деления формулу:

Эту формулу можно вывести ещё следующим образом. Согласно определению, мы должны иметь: (a’ + b’i)(x + yi)  = a + bi. Значит, должны удовлетворяться следующие два уравнения:

a’x – b’y = a; b’x + a’y = b.

Эта система имеет единственное решение:

если a’/b’ = -b’/a’, т. е. если a’2+ b’2 = 0.

 Остается рассмотреть случай a’2 + b’2 = 0. Он возможен лишь тогда, когда

a’ = 0 и b’ = 0, т. е. когда делитель a’ + b’i равен нулю. Если при этом и делимое

a + bi равно нулю, то частное не определено. Если же делимое не равно нулю, то частное не существует (говорят, что оно равно бесконечности).

**5).Операция перехода к сопряжённому числу.**

Если у комплексного числа сохранить действительному часть и поменять знак и мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному. Если данное комплексное  обозначено буквой , то сопряженное число обозначают .

*Свойство 1*. Если , то .

*Свойство 2.* , т. Е. число сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

*Свойство 3*., т. Е. число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

*Свойство 4*., т. Е. число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

*Свойство 5*. 

*Свойство 6*. 

**6).Возведение в степень.**

Полагают

где n – натуральное число.

Для z ≠ 0 полагают z0 = 1, z-n = 1/zn

При возведении комплексного числа в степень с целым показателем справедливы следующие свойства:

zp .zq = zp+q,

(zp)q = zpq, zp/zq = zp-q,

(z1 . z2)p = zp1 . zp2,

(z1/z2)p = z1p/z2p, где p и q – целые.

Найдём степени числа i.

По определению i0 = 1, i1 =i; далее, известно, что i2 = -1. Поэтому i3 = i2 .  i = -i,

i4 = i3 .  i = 1, i5 = i4 .  i = i.

Вообще i4n = 1, i4n+1 = i, i4n+2 = -1, i4n+3 = -i (n – число натуральное).

**7).Извлечение корня.**

Определение: *корнем n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w,*

*w =, что wn = z (n≥2 – натуральное).*

*Таким образом, извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень.*

**Теорема.**Если , то

*Пример 1*. Вычислить:

Здесь z=i=0+1 По теореме получаем:

**Пример 2.**Извлечём, например, квадратный корень из действительного отрицательного числа (-a2) и покажем, что = +ai или = -ai.  В частности, = +-i.

Полагая = х + yi, имеем (x + yi)2 = -a2 или (x2 – y2) + 2xyi = -a2. Отсюда получаем систему двух уравнений

решив которую, найдём, что x = 0, y = +-a

(случай у = 0 невозможен, так как при этом х2 = -а2, что неверно для действительных чисел). Поэтому= +-ai.

Доказано, что корень всегда существует и имеет ровно n различных значений, если z≠0. Очевидно, = 0.

**4. Основная теорема алгебры.**

Комплексные числа обладают алгебраической замкнутостью – всякое алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами имеет корни. Например, уравнение х2 – 4х + 13 = 0 имеет отрицательный дискриминант (D =

=16-52=-36 < 0), но корни этого уравнения будут х1= 2-3i и х2 = 2+3i, т.е. квадратное уравнение из множества комплексных чисел имеет два комплексных числа корнями уравнения.

А. Жирар и Р. Декарт сформулировали основную теорему алгебры – всякое алгебраическое уравнение имеет столько корней, какова его степень. А доказал эту теорему немецкий математик К. Гаусс.

|  |  |
| --- | --- |
| https://lh4.googleusercontent.com/GCeBq-03pGmA0OYyXPvHRD64lqQU1i_EA8HpebcXeVdU5YGTWGBaadykMfmFEdhhnwWhTAO1YGmmflzRoZ3hOUpfdZs3I-0MkvI15T3Jkqg-QnYNsh8 | Карл – Фридрих Гаусс (1777 – 1855). Знаменитый немецкий математик. Гаусс – человек с универсальными математическими способностями; им затрагивались почти все главные отрасли чистой и прикладной математики. Гаусс создал множество математических трудов, среди которых: «О протяжении эллипсоидов», «Мемуары по теории биквадратичных вычетов, в которых впервые введено в теорию чисел понятие о целых комплексных числах вида а + bi» и многие другие. |

**5.Геометрическое изображение комплексных чисел.**

Комплексным числам соответствуют простые геометрические образы на двумерной плоскости. В этом случае ось x называют действительной осью, ось y– мнимой осью, а саму плоскость (xy)– плоскостью комплексных чисел, или z-плоскостью. Комплексное число изображают либо точкой с координатами (a, b), либо вектором с началом в центре координат (0, 0) и концом в точке с координатами (a, b) (см. Рисунок).

**6.Комплексные числа и координатная плоскость.**

При переходе к геометрической модели множества С комплексных чисел требуется, как минимум, ещё одно измерение: ведь все точки прямой уже «заняты» действительными числами. Оказывается, геометрической моделью множества C является координатная плоскость. Каждому комплексному числу можно естественным образом поставить в соответствие точку координатной плоскости. Тогда любому комплексному числу соответствует единственная точка на координатной плоскости, и наоборот, каждая точка плоскости является «изображением» единственного комплексного числа.

В случае с комплексными числами, в соответствие с числовой прямой, отождествление с точками координатной плоскости. Например, фраза: «число z1 лежит в первой координатной четверти» - просто означает, что и действительная и мнимая части комплексного числа  положительны. Слова «z**2** лежит на оси ординат» являются переводом на геометрический язык того факта, что число z2 чисто мнимое, а «…комплексное число z3расположены выше биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей…» – показывают, что мы имеем дело с комплексным число , у которого мнимая часть больше действительной части.

Иногда приведенные правила для сложения, вычитания комплексных чисел и умножения комплексных чисел на действительные числам объединяют таким образом: во множество комплексных чисел операции сложения, вычитания и умножения вычитания и умножения на действительные числа производятся покоординатно. Подчеркнем что сама эта формулировка предполагает операции уже не с самими комплексными числами, а с их геометрическими, векторными представлениями.

На координатной плоскости отмечены комплексные числа: 

На координатной плоскости отмечены некоторые действительные и чисто мнимые числа: 0, 5, -3,5, i, -2i.

**Пример.**Для комплексных чисел  изобразить на координатной плоскости числа: .

Решение:

Иногда приведенные правила для сложения, вычитания комплексных чисел и умножения комплексных чисел на действительные числа объединяют таким образом: во множестве комплексных чисел операции сложения, вычитания и умножения на действительные числа производятся покоординатно. Подчеркнем, что сама формулировка предполагает операции уже не с самими комплексными числами, а с их геометрическими, векторными представлениям.

**7.Модуль комплексного числа.**

**Модулем**комплексного числа  называют число . Обозначение: .

Пример найти модуль комплексного числа:

Решение.







**Теорема. *Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел:***



*Свойства модуля:*















 Длина вектора, изображающего комплексное число, называется модулем этого комплексного числа. Модуль всякого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число. Модуль комплексного числа a + bi обозначается

| a + bi |, а также буквой r.

r = | a + bi | = a2 + b2

 Модуль действительного числа совпадает с его абсолютным значением. Сопряжённые комплексные числа a + bi u a – bi имеют один и тот же модуль.

**8.Аргумент комплексного числа**

***Аргументом отличного от нуля  комплексного числа z***называют действительное число α такое, что:

Обозначение: **arg z**

Геометрически аргумент комплексного числа z можно истолковать так: это угол, заключенный в пределах , который вектор z образует с положительным направлением оси абсцисс.

**9.Перевод   z =** **a + bi** **из алгебраической формы в тригонометрическую**.

**Теорема.** ***Если комплексное число z лежит на числовой окружности, то******для некоторого действительного числа******; если******, то z лежит на числовой окружности.***

Введём обозначение r = |z | =

tgφ = b/a. Отсюда мы можем найти сам угол φ

z = r(cosφ + i sinφ). Перевод очевиден.

**Пример**. z = 1 + . i

a = 1    b =

|z| =

|z| =  =  =    = 2;

tgφ = b/a;

tgφ = /1 =;  φ = 600;

z = |z|(cosφ + i sinφ);

z = 2(cos600+ i sin600);

1 + = 2(cos600+ i sin600).

**Пример.** Записать данное комплексное число в стандартной тригонометрической форме 

*Решение*. Найдём модуль числа . Получим:



Значит, . Осталось вычислить аргумент :



Ясно что .

Итак, 

**Пример**. Выразить  через  и  через .

*Решение.* Запишем формулу Муавра при :

.

Левую часть раскроем по формуле куба суммы:



Итак,



Используя условия равенства комплексных чисел, получаем:

1)











Итак,





**Пример**. Найти сумму



*Решение*. Для комплексного числа  рассмотрим геометрическую прогрессию 1, z, z2, z3, …со знаменателем z.Запишем формулу для суммы первых  членов этой прогрессии:

*.*

К каждому слагаемому левой части применим формулу Муавра:



Осталось найти действительную и мнимую части дроби ,

А затем воспользоваться тем, что действительная часть равна С, а мнимая часть равна S.Отсюда и получается нужные формулы для С и S. Сначала преобразуем знаменатель:



Значит,





В итоге получаем:



**10.Перевод z =a+bi из тригонометрической формы в алгебраическую.**

z = r (cosφ + i sinφ)

Раскроем скобки: z = r. cosφ + i. r.sinφ

z = a + bi. Перевод очевиден

**Пример.**  z = 5 (cos1200 + i.sin1200)

Решение. z = 5 (-1/2) + i.5. (/2);

z = -5/2 +5/2.i

Геометрически сумма комплексных чисел равна суммарному вектору, слагаемыми которого служат векторы суммируемых комплексных чисел. (Сложение векторов производятся по правилам, изложенным в геометрии.) Разность векторов комплексных чисел тоже равна вектору разности.

**11.Перемножение комплексных чисел в тригонометрической форме.**

В этом разделе используются следующие тригонометрические формулы:

sin (α + β) = sin α . cos β + cos α .  sin β;

sin (α - β) = sin α .  cos β - cos α .  sin β;

cos (α + β) = cos α . cos β - sin α .  sin β;

cos (α - β) = cos α . cos β + sin α .  sin β.

Запишем два комплексных числа в тригонометрической форме:

z1= r1(cosφ1 + i. sinφ1) и z2 = r2(cosφ2 + i. sinφ2)

Вычислим их произведение в тригонометрической форме по правилам перемножения комплексных чисел:

z1.z2 = r1(cosφ1 + i.sinφ1). r2(cosφ2 + i.sinφ2) = r1.r2(cosφ1 + i.sinφ1) (cosφ2 + i.sinφ2) = =r1.r2(cosφ1.cosφ2 + i.cosφ1.sinφ2 + i.sinφ1.cosφ2 + i2. sinφ1.sinφ2) = r1.r2((cosφ1. cosφ2-sinφ1.sinφ2) + i(sinφ1.cosφ2 + sinφ2.cosφ1)) = r1.r2[cos(φ1+ φ2) + i.sin(φ1+ φ2)]

Применяя это правило, получаем формулу для возведения комплексного числа в любую степень: [r(cosφ + i.sinφ)]n = rn(cos.n.φ + i.sin.n.φ)

**12. Возведение комплексного числа в степень.**

Формула Муавра.

(ρ(cosα+i sinα))n = ρn(cos nα+i sin nα), nN

*Пример*: (cos 15°+i sin 15°)6=cos(15°·6)+i sin (15°·6)=cos 90°+i sin 90°=i

*Следствие 1. (ρ(cosα+i sinα))n=ρn(cos na+i sin na),nZ*

*Следствие 2.(cos α+i sin α)n=cos na+i sin na,nZ*

*Следствие 3.*Если модуль комплексного числа z равен единице, а его аргумент равен 2π/m (m=3,4,5…), то множество степеней z0,z1,z2,z3,…zm-1 образует на комплексной плоскости множество вершин правильного m-угольника, вписанного в единичную окружность.